



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de mecánica de medios continuos y
teoría de estructuras

PROYECTO FIN DE CARRERA

Análisis del estado tensional en el ala de un Canadair CL-415

Autora: Adelma Rodríguez López

Tutor: Enrique Barbero Pozuelo

Titulación: Ingeniería Técnica Industrial Mecánica

Leganés, Julio de 2010



Agradecimientos

A mis padres y a Adolfo por apoyarme siempre.

A mi tutor, Enrique Barbero, por haberme dado la oportunidad de hacer este proyecto y por la ayuda que me ha prestado en todo momento.



Resumen

En este proyecto se aborda el análisis del estado tensional del ala de un Canadair CL-415. Para ello se recurre a los modelos analítico y numérico.

En la primera etapa se emplean las ecuaciones proporcionadas por la teoría de resistencia de materiales. En la segunda etapa se resuelve la estructura mediante el uso del programa de elementos finitos COSMOS.



Índice

Nomenclatura	14
1. Introducción	17
1.1. Motivación	17
1.2. Objetivos	21
1.3. Descripción del proyecto	22
2. Planteamiento del problema	23
2.1. Avión- Canadair CL-415	23
2.2. Análisis de cargas sobre el ala	26
2.2.1. Peso del motor	26
2.2.2. Peso del flotador	29
2.2.3. Peso del ala	30
2.2.4. Fuerza de sustentación	32
2.2.5. Representación de las fuerzas	33
2.3. Descripción de carga en vuelo nivelado	35
2.4. Descripción de carga en maniobra simétrica	38
3. Esfuerzos sobre el ala	40
3.1. Cálculos	40
3.2. Valores críticos de diseño	46
3.2.1. En vuelo nivelado	46
3.2.2. En maniobra simétrica	47
3.2.3. Discusión de resultados	49
4. Análisis de secciones de pared delgada	50
5. Aplicación al análisis del cajón de torsión	60
5.1. Introducción	60
5.2. Parámetros geométricos	63
5.2.1. Centro de gravedad	63
5.2.2. Momento de inercia	64

5.2.3. Producto de inercia	65
5.3. Cálculo de la tensión normal	66
5.4. Cálculo de la tensión tangencial	68
5.5. Diseño del cajón de torsión	75
6. Estudio paramétrico	77
6.1. Semienvergadura	78
6.1.1. Cálculos con una envergadura igual a veinticuatro metros	79
6.1.2. Cálculos con una envergadura igual a treinta y tres metros	84
6.1.3. Cálculos con una envergadura igual a treinta y ocho metros	88
6.1.4. Discusión de los resultados	92
6.1.4.1. Envergadura frente al espesor del cajón de torsión	92
6.1.4.2. Envergadura frente al espesor que tendría el cajón de torsión si tuviera que soportar únicamente esfuerzos tangenciales	93
6.1.4.3. Envergadura frente al peso del ala	94
6.2. Cuerda	95
6.2.1. Cálculos con una cuerda igual a dos metros	96
6.2.2. Cálculos con una cuerda igual a cuatro metros y medio	99
6.2.3. Cálculos con una cuerda igual a seis metros	102
6.2.4. Discusión de los resultados	105
6.2.4.1. Cuerda frente al espesor del cajón de torsión	105
6.2.4.2. Cuerda frente al espesor que tendría el cajón de torsión si tuviera que soportar únicamente esfuerzos tangenciales	106
6.2.4.3. Cuerda frente al peso del ala	107
6.3. Ubicación del motor	108
6.3.1. Cálculos con una ubicación del motor de un metro y medio del empotramiento	108
6.3.2. Cálculos con una ubicación del motor de tres metros y medio del empotramiento	109



6.3.3. Cálculos con una ubicación del motor de cinco metros del empotramiento	110
6.3.4. Discusión de los resultados	111
6.3.4.1. Posición del motor frente al espesor del cajón de torsión	111
6.4. Ubicación del flotador	112
6.4.1. Cálculos con una ubicación del flotador de trece metros y medio del empotramiento	112
6.4.2. Cálculos con una ubicación del motor de nueve metros y medio del empotramiento	113
6.4.3. Cálculos con una ubicación del motor de ocho metros del empotramiento	114
6.4.4. Discusión de los resultados	115
6.4.4.1. Posición del flotador frente al espesor del cajón de Torsión	115
6.5. Espesor del ala	116
6.5.1. Cálculos con un espesor del ala de cuarenta centímetros	117
6.5.2. Cálculos con un espesor del ala de ochenta centímetros	123
6.5.3. Cálculos con un espesor del ala de un metro	128
6.5.4. Discusión de los resultados	134
6.5.4.1. Espesor del ala frente al espesor del cajón de torsión	134
6.5.4.2. Espesor del ala frente al espesor que tendría el cajón de torsión si tuviera que soportar únicamente esfuerzos tangenciales	134
6.5.4.3. Espesor del ala frente al peso del ala	135
6.6. Discusión de resultados	136
6.6.1. Distancia frente al espesor del cajón de torsión	136
6.6.2. Distancia frente al espesor que tendría el cajón de torsión si tuviera que soportar únicamente esfuerzos tangenciales	137
6.6.3. Distancia frente al peso del ala	138
7. Análisis numérico	139

7.1. Introducción	139
7.2. Modelo simplificado 1	141
7.2.1. Modelo físico y dominio computacional	141
7.2.2. Cargas y condiciones de contorno	141
7.2.3. Mallado del dominio computacional	144
7.2.4. Resultados del modelo simplificado 1	147
7.3. Modelo simplificado 2	151
7.3.1. Modelo físico y dominio computacional	151
7.3.2. Cargas y condiciones de contorno	151
7.3.3. Mallado del dominio computacional	151
7.3.4. Resultados del modelo simplificado 2	153
7.4. Modelo detallado	156
7.4.1. Modelo físico y dominio computacional	156
7.4.2. Cargas y condiciones de contorno	157
7.4.3. Mallado del dominio computacional	158
7.4.4. Resultados del modelo detallado	159
7.5. Discusión de resultados	162
7.6. Mejora de los resultados	163
8. Conclusiones y trabajos futuros	164
8.1. Conclusiones	164
8.2. Trabajos futuros	165
Bibliografía	167

Índice de figuras

Figura 1.1: Elementos estructurales del ala de un avión	17
Figura 1.2: Viga de pared delgada empotrada en uno de sus extremos	18
Figura 1.3: Ayres Turbo Thrush	19
Figura 1.4: Piper PA36	19
Figura 1.5: Boeing 747-400	19
Figura 1.6: Canadair CL-415	20
Figura 1.7: Fokker F 28	20
Figura 1.8: EADS-CASA 212	20
Figura 2.1: Imagen avión Canadair CL-415	23
Figura 2.2 Imagen motor Pratt&Whitney, modelo PW123AF	24
Figura 2.3 Planta del CL-415	25
Figura 2.4: Imagen del CL-415 deslizándose sobre el agua	29
Figura 2.5: Esquema de fuerzas al que está sometido el avión	33
Figura 2.6: Esquema de fuerzas simbólico equivalente al que sufre el ala del avión	34
Figura 2.7: Esquema del avión en vuelo nivelado	35
Figura 2.8: Esquema del avión en maniobra simétrica	38
Figura 3.1: Esfuerzo cortantes y flector del primer tramo ($0 < x < 2,5$)	40
Figura 3.2: Esfuerzo cortantes y flector del segundo tramo ($2,5 < x < 11,90$)	42
Figura 3.3: Esfuerzo cortante y flector del último tramo ($11,90 < x < 14,32$)	44
Figura 3.4: Diagrama de esfuerzos cortantes en vuelo nivelado	46
Figura 3.5: Diagrama de momentos flectores en vuelo nivelado	47
Figura 3.6: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica	47
Figura 3.7: Diagrama de momentos flectores en maniobra simétrica	48
Figura 4.1: Triedro de referencia ortogonal	50
Figura 4.2: Sección cerrada de pared delgada	53
Figura 4.3: Equilibrio de fuerzas en un trozo de barra	55
Figura 5.1: Perfil del cajón de torsión	60

Figura 5.2: Cataway del Canadair CL-415	61
Figura 5.3: Perfil del cajón de torsión dividido en rectángulos	62
Figura 5.4: Rectángulo macizo de longitudes a y b	64
Figura 5.5: Origen de la coordenada curvilínea s	68
Figura 5.6: Distribución del flujo cortante	74
Figura 6.1: Diagrama de esfuerzos cortantes en vuelo nivelado para una envergadura de 24 m	80
Figura 6.2: Diagrama de esfuerzos flectores en vuelo nivelado para una envergadura de 24m	81
Figura 6.3: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 24m	82
Figura 6.4: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para envergadura de 24m	82
Figura 6.5: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 33m	86
Figura 6.6: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una envergadura de 33m	86
Figura 6.7: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 38m	89
Figura 6.8: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una envergadura de 38m	90
Figura 6.9: Relación entre el espesor del cajón de torsión y la envergadura	92
Figura 6.10: Relación entre el espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales y la envergadura	93
Figura 6.11: Relación entre el peso del ala y la envergadura	94
Figura 6.12: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 2 m	97
Figura 6.13: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 2 m.	97

Figura 6.14: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 4,5 m.	100
Figura 6.15: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 4,5m.	100
Figura 6.16: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 6 m	103
Figura 6.17: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 6 m	103
Figura 6.18: Relación del espesor del cajón de torsión con la cuerda	105
Figura 6.19: Relación entre el espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales y la cuerda	106
Figura 6.20: Relación entre el peso del ala y la cuerda	107
Figura 6.21: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 1,5metros desde la raíz	108
Figura 6.22: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 3,5metros desde la raíz	109
Figura 6.23: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 5metros desde la raíz	110
Figura 6.24: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia a la que se encuentran ubicados los motores	111
Figura 6.25: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 13,5 metros desde la raíz	112
Figura 6.26: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 9,5metros desde la raíz	113
Figura 6.27: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 8metros de la raíz	114
Figura 6.28: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia a la que se encuentran ubicados los flotadores	115



Figura 6.29: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de cuarenta centímetros	118
Figura 6.30: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de cuarenta centímetros	119
Figura 6.31: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a cuarenta centímetros	122
Figura 6.32: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de ochenta centímetros	124
Figura 6.33: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de ochenta centímetros	124
Figura 6.34: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a ochenta centímetros	127
Figura 6.35: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de un metro	129
Figura 6.36: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de de un metro	130
Figura 6.37: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a un metro	133
Figura 6.38: Relación del espesor del cajón de torsión con el espesor del ala	134
Figura 6.39: Relación entre el espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales con el espesor del ala	134
Figura 6.40: Relación entre el peso del ala y el espesor de la misma	135
Figura 6.41: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia	136
Figura 6.42: Relación del espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales con la distancia	137
Figura 6.43: Relación del peso del ala con la distancia	138
Figura 7.1: Perfil aerodinámico del ala simulado en el modelo detallado	140
Figura 7.2: Cajón de torsión simulado en COSMOS	141
Figura 7.3: División de la estructura en estudio en superficies	142

Figura 7.4: Comparación de la fuerza de sustentación real frente a la aproximada introducida en el programa COSMOS	143
Figura 7.5: Imagen de un elemento tipo Shell 3	145
Figura 7.6: Relación de la tensión máxima del cajón en el modelo simplificado frente al número de nodos totales	145
Figura 7.7: Mallado de la estructura en estudio	146
Figura 7.8: Zoom del mallado del modelo simplificado 1	146
Figura 7.9: Campo de tensiones de Von Mises del modelo simplificado 1	147
Figura 7.10: Campo de tensiones normales en dirección del eje X del modelo simplificado 1	147
Figura 7.11: Deformada del modelo simplificado 1	148
Figura 7.12: Vista lateral de la deformada del modelo simplificado 1	148
Figura 7.13: Sección genérica del cajón de torsión	149
Figura 7.14: Superficies del modelo simplificado 2	151
Figura 7.15: Mallado de la estructura en estudio, modelo simplificado 2	152
Figura 7.16: Zoom del mallado del modelo simplificado 2	152
Figura 7.17: Campo de tensiones de Von Mises del modelo simplificado 2	153
Figura 7.18: Campo de tensiones normales en dirección del eje X del modelo simplificado 2	153
Figura 7.19 Deformada del modelo simplificado 2	154
Figura 7.20: Vista lateral de la deformada del modelo simplificado 2	154
Figura 7.21: Perfil del ala simulado en Cosmos, dividido en superficies	156
Figura 7.22: Mallado del modelo detallado	158
Figura 7.23: Zoom del mallado del modelo detallado	159
Figura 7.24: Campo de tensiones de Von Mises del modelo detallado	159
Figura 7.25: Campo de tensiones normales en dirección del eje X del modelo detallado	160
Figura 7.26 Deformada del modelo detallado	160
Figura 7.27: Vista lateral de la deformada del modelo detallado	161
Figura 8.1: Tipos de alas de aviones	165



Índice de tablas

Tabla 5.1: Características del aluminio 7075	75
Tabla 6.1: Rango de valores a estudiar	77
Tabla 7.1: Fuerza de sustentación en cada uno de los trece puntos	143
Tabla 7.2: Fuerza de sustentación media, modelo simplificado	144
Tabla 7.3: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la sección, modelo simplificado 1	149
Tabla 7.4: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la Sección, modelo simplificado 2	155
Tabla 7.5: Fuerza de sustentación media para el modelo detallado	157
Tabla 7.6: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la Sección, modelo detallado	161
Tabla 7.7: Resultados obtenidos en el programa de simulación COSMOS	162

Nomenclatura

a	Aceleración, m/s^2
A	Relación de aspecto, []
b	Envergadura, m
c	Cuerda, m
d	Distancia entre largueros, m
e	Espesor, m
g	Aceleración de la gravedad, m/s^2
h	Espesor del perfil, m
I_{ij}	Momento de inercia en el plano ij , m^4
K	Coeficiente de sustentación, []
K_{ng}	Parámetro de Raymer, []
K_p	Parámetro de Raymer, []
K_{tr}	Parámetro de Raymer, []
$Long$	Longitud del ala, m
m^*	Momento estático, m^3
M	Momento flector, N/m
n	Factor de carga límite, []
N_{en}	Número de motores presentes en el avión, []
N_{Lt}	Largo de la góndola, m
N_W	ancho de la góndola, m

N_z	factor de carga, []
P_{ij}	Producto de inercia en el plano ij, m^4
q_v	Flujo cortante, $MPa \cdot m$
Q	Esfuerzo cortante, MPa
$R(x)$	Peso del ala por unidad de longitud, N/m
S	Perímetro de la línea media del perfil, m
$l(x)$	Fuerza de sustentación, N/m
L	Fuerza de sustentación, N/m
S_{scw}	Área de la superficie de control, m^2
S_n	Área mojada de la góndola, m^2
S_w	Área del ala, m^2
t	Equivale a h , m
W_{dg}	Equivale a W_{Tow} , N
W_F	Peso del flotador, N
W_{motor}	Peso del motor, N
$W_{nacelle}$	Peso de la góndola, N
W_T	Peso total del motor, N
W_{TOW}	Máximo peso al despegue, N
W_{wing}	Peso del ala, N
λ	Conicidad del ala, $^\circ$
Λ	Ángulo barrido por el ala, $^\circ$
τ	Tensión tangencial, MPa



σ Tensión normal, *MPa*

δ_s Coeficiente de seguridad, []

1. Introducción

1.1. Motivación

El diseño de una aeronave es un proceso muy complejo que engloba desde el sector aerodinámico hasta el naval, pasando por la automoción. Es decir se necesita construir un aparato que posea buenas aptitudes para el vuelo, tenga estabilidad suficiente para realizar las maniobras en tierra y, en caso de los hidroaviones, sea capaz de desplazarse sobre el agua en las maniobras de llenado de los tanques. Para poder satisfacer todos estos requerimientos se necesita de personal altamente cualificado en los diversos campos.

Las alas son la parte estructural de un avión que le permite volar. Esto es debido a la fuerza de sustentación creada en las mismas gracias al perfil aerodinámico que poseen. Un ala está formada por diferentes elementos estructurales, en la dirección longitudinal se encuentran los largueros y, en dirección transversal el revestimiento que da forma al cajón de torsión. También posee costillas a modo de refuerzos, figura 1.1.

Los largueros habitualmente son rectos y se encuentran a un 10% y un 60% de la cuerda, su finalidad es la de soportar el estado principal de cargas, que corresponde a un momento flector provocado por la fuerza de sustentación. El cajón de torsión es el único elemento que se extiende a lo largo de toda la longitud del ala, delimitado por un larguero anterior, uno posterior y el revestimiento entre los dos.

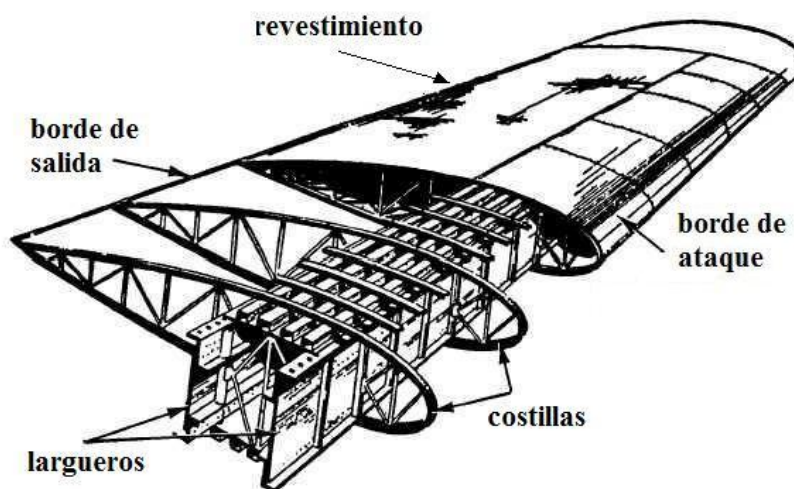


Figura 1.1: Elementos estructurales del ala de un avión.

Una vez conocidos los requerimientos y características generales de la aeronave se continúa modelando los distintos componentes mecánicos y estructurales del mismo. En una primera instancia se dimensiona la geometría mediante estimaciones y cálculos sencillos para después poder ajustar las cotas con mayor precisión y dar las dimensiones exactas de los elementos definitivos. Debido a la complejidad de esta estructura en este proyecto se simplificará el ala simulando únicamente el cajón de torsión como una viga de pared delgada empotrada en uno de sus extremos, figura 1.2. El problema se abordará mediante técnicas de resistencia de materiales y mediante métodos numéricos.

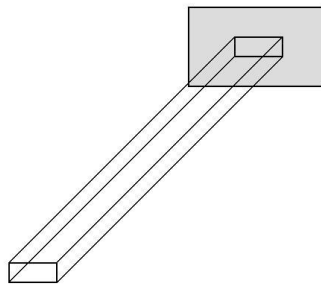


Figura 1.2: Viga de pared delgada empotrada en uno de sus extremos.

Selección de la aeronave

Debido al carácter didáctico de este documento se decidió basar los cálculos sobre el modelo de una aeronave ya existente y de la que se conocían las dimensiones generales. A la hora de seleccionar el avión no había ningún requerimiento específico. En un primer momento se barajaron varias posibilidades; se podría estudiar tanto aviones pequeños como el “Piper PA36”, figura 1.4 o el “Ayres Turbo Thrush”, figura 1.3 (ambos construidos para uso agrícola) o grandes naves como el “Boeing 747-400” (avión de uso comercial), figura 1.5. Al final se optó por algo de tamaño intermedio.

Del segmento medio se hizo una primera selección de la que salieron tres candidatos: el “EADS-casa 212” (de transporte ligero y patrulla marítima) figura 1.8, el “Canadair CL-415” (un avión anfibia dedicado principalmente a la lucha contra incendios), figura 1.6 y el Fokker F28 (destinado para el transporte civil), figura 1.7. Para determinar un ganador se desecharon los aviones de un solo motor, pues la presencia de motores en las alas incluye una carga puntual que hace más interesantes los cálculos debido a un mayor compromiso estructural. Por esta causa se descartó el Fokker F28. Entre los dos modelos restantes se escogió el Canadair CL-415 ya que al ser un hidroavión añade interés al presente documento gracias a la presencia de flotadores en los extremos del ala, pues aumenta el número de cargas suspendidas.

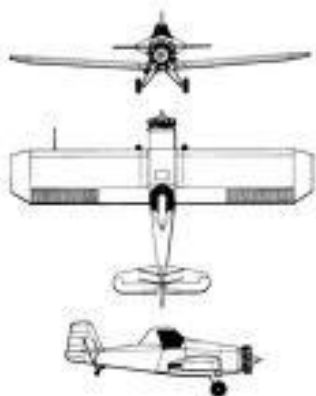


Figura 1.3: Ayres Turbo Thrush

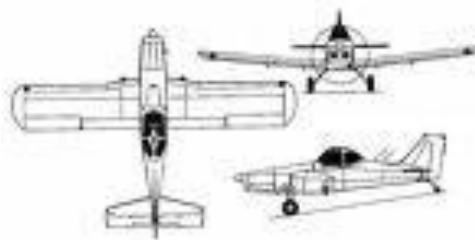


Figura 1.4: Piper PA36

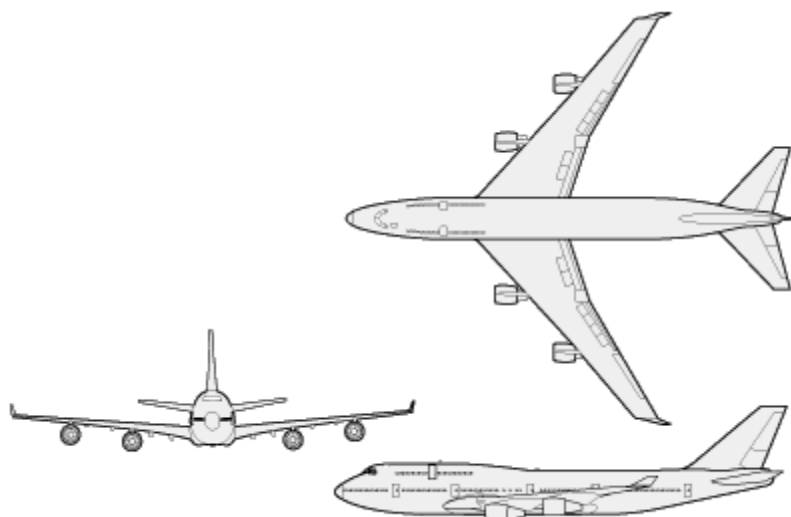


Figura 1.5: Boeing 747-400

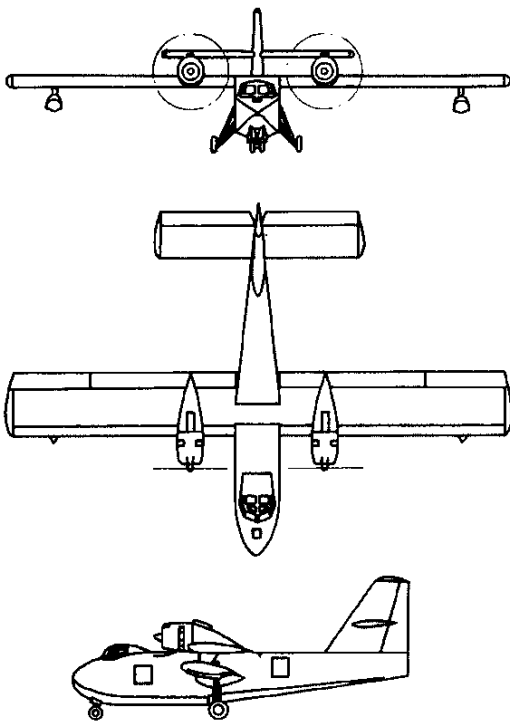


Figura 1.6: Canadair CL-415

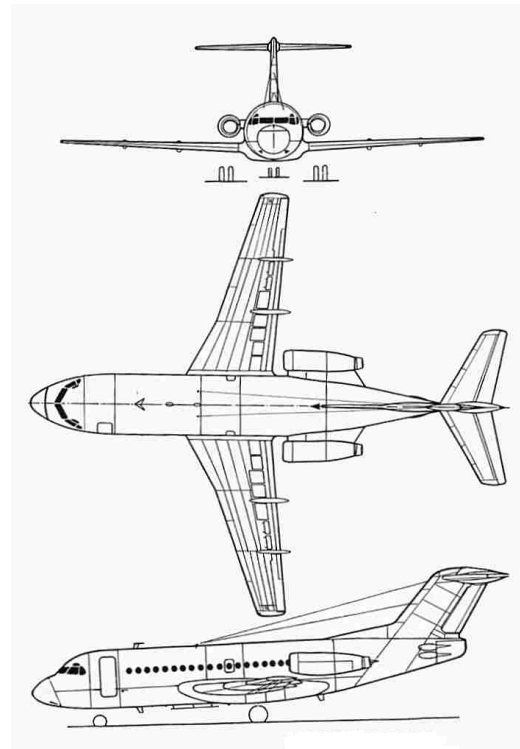


Figura 1.7: Fokker F28

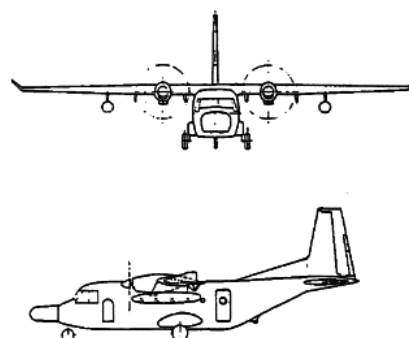
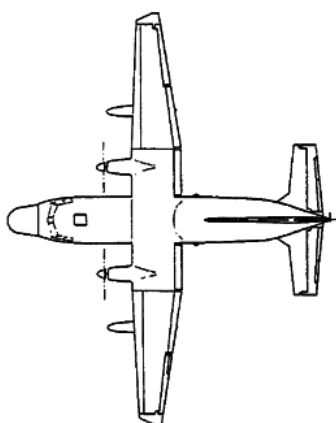


Figura 1.8: EADS-casa 212



1.2. Objetivos

El objetivo global de este proyecto es estudiar el estado tensional creado en el ala de un avión Canadair CL-415 cuando se encuentra sometida a las solicitaciones siguientes: peso del motor, peso del flotador, peso del ala y fuerza de sustentación. Para alcanzar este objetivo global se han planteado los siguientes objetivos parciales:

- Establecer un punto de partida para el estudio del estado tensional del ala de un avión.
- Conocer la teoría de resistencia de materiales para el cálculo de tensiones y su aplicación a estructuras de pared delgada.
- Realización de un estudio paramétrico con el fin de observar las consecuencias de variar las dimensiones características.
- Familiarizarse con los programas de simulación de elementos finitos utilizando la versión comercial COSMOS disponible en las aulas informáticas de la Escuela Politécnica de la Universidad Carlos III de Madrid.
- Validar los resultados obtenidos en las simulaciones mediante la comparación con los resultados analíticos.
- Introducir variaciones sobre el diseño inicial con el fin de mejorar las simulaciones.



1.3. Descripción del proyecto

El proyecto desarrollado consta de ocho capítulos dividido cada uno en subcapítulos.

- En el capítulo primero se establecen los criterios para la selección del avión.
- El capítulo segundo describe las principales características del avión seleccionado así como sus dimensiones y su geometría. También se realiza un análisis de cargas sobre el ala estimando el valor de cada una de ellas. Por último se describen los dos tipos de maniobras de vuelo y se calcula la fuerza de sustentación para ambos casos.
- En el tercer punto se calculan los esfuerzos sobre el ala.
- El punto cuarto explica la teoría de resistencia de materiales para el cálculo de tensiones en estructuras de pared delgada.
- En el punto quinto se aplican las ecuaciones dadas por la teoría de resistencia de materiales al caso concreto del cajón de torsión del ala del avión Canadair CL-415 y se estima el espesor del mismo necesario para soportar los esfuerzos normales y tangenciales.
- En el punto sexto se realiza un estudio paramétrico, observando su influencia sobre el espesor del cajón de torsión y sobre el peso del ala.
- En el séptimo capítulo se calcula el estado tensional del ala mediante la simulación por elementos finitos, empleando el programa COSMOS.
- En el último capítulo se narran las conclusiones y se comenta los trabajos futuros.

2. Planteamiento del problema

2.1. Avión

Los requerimientos para realizar el proyecto dieron como candidato ganador al Canadair CL-415. Si se recuerda se prefirió un hidroavión con dos motores por las cargas puntuales que esta configuración otorgaba al problema.

Canadair CL-415

El Canadair CL-415 está basado en el modelo CL-215 de la misma compañía.

Como ya se ha mencionado es un avión anfibia contra-incendios; pero también se adapta a variedad de misiones especializadas como la vigilancia marítima, la búsqueda, rescate y transporte de personal, figura 2.1.



Figura 2.1: Imagen del avión Canadair CL-415

Al ser una hidrocanoa posee el fuselaje en forma de barco y unos pequeños flotadores en las alas que proporcionan estabilidad en las maniobras que se realizan sobre el agua, impidiendo vuelcos y evitando el contacto directo del ala con el agua.

El diseño del CL-415 surge por los requerimientos de un avión anfibia contra-incendios capaz de detectar y eliminar incendios forestales. El CL-415 está específicamente diseñado para esparcir grandes cantidades de supresores sobre un incendio en sus estados iniciales, evitando la expansión del mismo en situaciones en las que los equipos de tierra no sean capaces de controlar la situación o simplemente como apoyo extra.

Sus depósitos están diseñados para recoger hasta 6.140 litros de agua desde cualquier fuente cercana (pantanos, embalses, ríos, etc) mezclándola con agentes químicos, y soltándola sobre un fuego sin necesidad de volver a la base. El avión se ha construido pensando en la fiabilidad y longevidad del mismo usando materiales anti-corrosivos. Las cargas de agua pueden mezclarse con retardantes del fuego.

Fue lanzado por primera vez en 1991. Realizó su primer vuelo en diciembre de 1993, siendo las primeras entregas en noviembre de 1994. Sesenta y cinco naves han sido destinadas a ese fin, trece a los gobiernos de Francia, ocho a Québec, diecisiete a Italia, siete a Croacia, nueve a Ontario, diez a Grecia y una a España.

El CL-415 lleva dos motores turbo propulsados Pratt & Whitney Canadá PW123AF, figura 2.2, que reemplazan a los motores de pistones del CL-215. El CL-415 también dispone de una cabina mejorada.



Figura 2.2: Imagen del motor de Pratt&Whitney, modelo PW123AF

Las dimensiones de los motores del CL 415, Pratt & Whitney Canada PW123AF son las siguientes:

Longitud→ 2,13m

Anchura→ 0,66m

Altura→ 0,84m

A continuación se muestra un esquema del avión (figura 2.3) y se proporcionan datos de relevancia tomados del Jane's (2000).

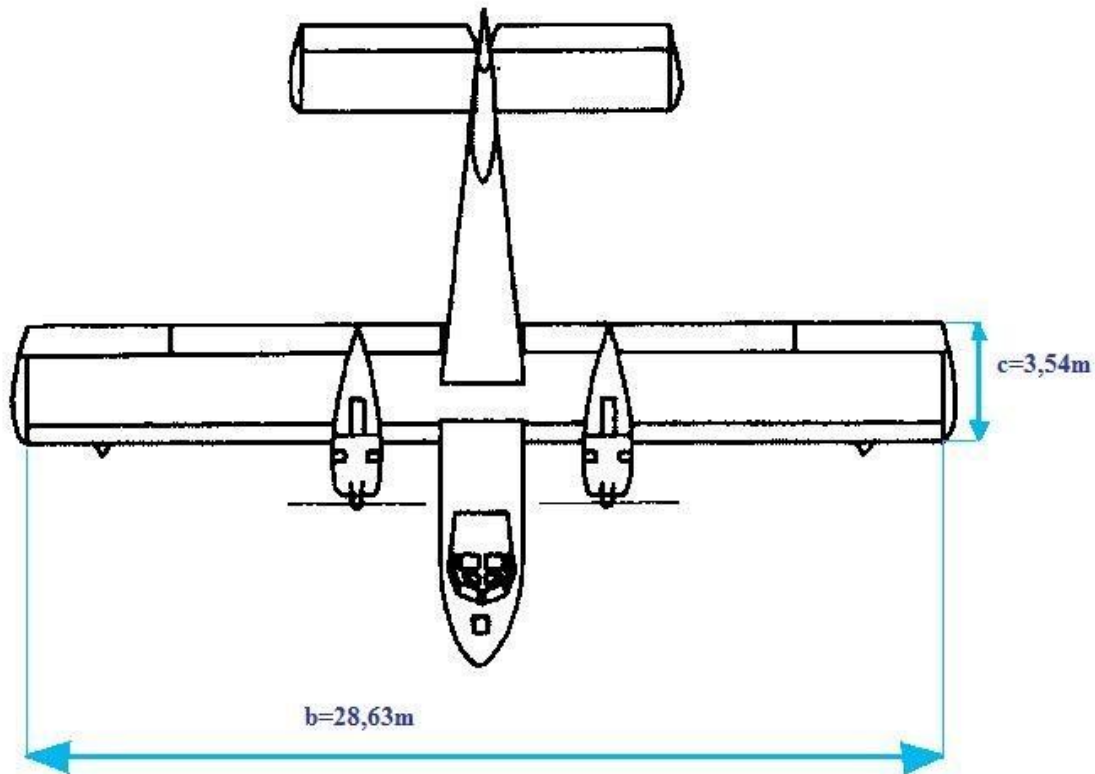


Figura 2.3: Planta del CL-415

Como se observa en el dibujo:

Envergadura (b) \rightarrow 28,63 m

Cuerda (c) \rightarrow 3,54 m

Otros datos importantes son:

Longitud \rightarrow 19,82m

Altura \rightarrow 8,98m

Máximo peso en el momento del despegue (W_{TOW}) \rightarrow 194922 N

Es necesario resaltar que para efectuar los cálculos se ha tomado el máximo peso en la situación de despegue crítico, que corresponde con el momento de despegue en tierra. Al ser una hidrocanoa también es capaz de iniciar el vuelo sobre el agua pero en este caso el peso es menor (168246,4 N frente a 194922N en despegue crítico). Esto es debido a que las condiciones de despegue sobre el agua son más desfavorables ya que se ha de vencer mayor resistencia que en el de tierra.

2.2. Análisis de cargas sobre el ala

En este apartado se analiza el sistema de fuerzas al que está sometida el ala del avión: peso del motor, peso del ala, peso del flotador y fuerza de sustentación. La magnitud de estas fuerzas no es conocida de antemano por lo que es necesario estimarlas antes de la fase de diseño, que será la parte crítica dentro del proceso.

De la bibliografía estudiada se va a seguir el libro de Raymer(1996), donde se pueden encontrar expresiones para aproximar el peso del motor y del ala mediante fórmulas empíricas basadas en estadísticas a partir de parámetros tales como la cuerda, la envergadura, el área del ala o la longitud del avión.

Por esta razón se utilizarán los parámetros geométricos según el sistema de unidades inglesas. El propósito es utilizar las ecuaciones sin necesidad de modificar los parámetros adimensionales que en ellas aparecen.

El peso del flotador se estima mediante simplificaciones geométricas, aproximando el flotador a un cilindro hueco.

La fuerza de sustentación se supone que sigue una distribución elíptica a lo largo de la longitud del ala.

2.2.1. Peso del motor

El CL-415 posee dos motores, uno en cada ala y situados a 2,42 metros de la base de la misma. Para calcular los esfuerzos que transmite el peso de cada motor (W_T) éste se considerará como una carga puntual aplicada en el centro de gravedad de la góndola que recubre y protege al motor.

Peso del motor

Para determinar el peso total del motor presente en el ala del avión seleccionado es necesario conocer el peso del propio motor y el de la góndola por separado.

Al ser el CL-415 un avión de carga y transporte la estimación propuesta por Raymer del peso de la góndola se realiza de la siguiente manera:

$$M_{nacelle} = 0,6724 \cdot K_{ng} \cdot N_{Lt}^{0,10} \cdot N_w^{0,294} \cdot N_z^{0,119} \cdot W_{ec}^{0,611} \cdot N_{en}^{0,984} \cdot S_n^{0,224} \quad (2.1)$$

Donde

K_{ng} es un parámetro geométrico que toma el valor de 1,017 para aviones cuya góndola va unida por un pilar al ala del avión, y 1 en caso contrario. En el caso del CL-415 K_{ng} toma el valor de 1, pues la góndola va empotrada en el ala del avión.

N_{lt} corresponde al largo de la góndola: $N_{lt} = 16,40\text{ ft}$ (5m)

N_w corresponde al ancho de la góndola: $N_w = 4,72\text{ ft}$ (1,44m)

N_z equivale al factor de carga: $N_z = 1,5 \cdot n = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75$ []

Donde n es el factor de carga límite, según la FAR 25, $n = 2,5$

W_{ec} equivale al peso del motor y su contenido: $W_{ec} = 2,331 \cdot W_{motor}^{0,901} \cdot K_p \cdot K_{tr}$

$W_{motor} = 1300,73\text{ lb}$ (590 Kg)

K_p vale 1,4 para motores con hélice y 1 en caso contrario. Para el CL 415 este parámetro toma el valor de 1,4; pues contiene 2 motores turbohélices

K_{tr} vale 1,18 para aviones reactivos con inversor de empuje, 1 en caso contrario. En este caso $K_{tr} = 1,18$, pues la hélice puede proporcionar el inversor de empuje (es un ala montada turbohélice)

$W_{ec} = 2,331 \cdot 1300,73^{0,901} \cdot 1,4 \cdot 1,18 = 2462,83\text{ libras}$

N_{en} corresponde al número de motores; en el caso del CL 415: $N_{en} = 2$

S_n corresponde al área mojada de la góndola, la cual se va a aproximar al área lateral de un cilindro de longitud el largo de la góndola (16,40 ft ó 5 m) y de diámetro el ancho de la misma (4,72 ft ó 1,44m)

$$S_{lateral\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$S_n = 2 \cdot \pi \cdot \frac{4,72}{2} \cdot 16,40 = 243,18\text{ ft}^2 \quad (22,59\text{ m}^2)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.1):

$$M_{nacelle} = 0,6724 \cdot 1 \cdot 16,40^{0,10} \cdot 4,72^{0,294} \cdot 3,75^{0,119} \cdot 2462,8^{0,611} \cdot 2^{0,984} \cdot 243,18^{0,224} = \\ = 1313,6 \text{ lb (595,7 Kg)}$$

La masa del motor lo proporciona Pratt & Whitney Canada, 590Kg.

De esta forma, la masa total del motor será:

$$M_T = M_{nacelle} + M_{motor} = 1313,36 + 1300,73 = 2614,09 \text{ lbm (1185,73 Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_T = 11620,15 \text{ N}$$

4.2. Peso del flotador

Al ser el avión en estudio un avión anfibia contra incendios necesita operar tanto en tierra como en agua. Existen dos tipos de hidroaviones, los hidroflotadores y las hidrocanoas. El CL-415 pertenece a éste último en los cuales la flotabilidad la proporciona el fuselaje, que tiene forma de casco de barco, y dos flotadores ubicados en las alas que le confieren estabilidad sobre el agua a la par que soporta el peso de las mismas al realizar el aterrizaje sobre el agua, amortiguando el impacto del avión y reduciendo los esfuerzos asociados al mismo debido a que las alas se comportan como elementos en voladizo, figura 2.4.

Por lo tanto se tendrá en cuenta el peso de los flotadores, que también se considerarán como cargas puntuales. Como se mencionó anteriormente, estos flotadores se aproximarán a un cilindro hueco de un centímetro de espesor de longitud 3,10 m y de radio exterior 0,44 m.

El material empleado en su construcción es plástico, cuya densidad es 1821,5 kg/m³. Para determinar su peso primero se ha de calcular el volumen de material empleado:

$$V = \pi \cdot h \cdot (r_{ext}^2 - r_{int}^2) = 0,085 m^3$$

Multiplicando este valor por su densidad y por el valor de la aceleración de la gravedad se obtendrá el peso correspondiente a cada flotador.

$$W_F = V \cdot \rho \cdot g = 0,085 \cdot 1821,5 \cdot 9,8 = 1519 N$$



Figura 2.4: Imagen del CL-415 deslizándose sobre el agua.

2.2.3. Peso del ala

El peso del ala ($R(x)$) se considerará como una carga distribuida de valor constante por unidad de longitud de ala. Para conocer su magnitud el autor proporciona la siguiente expresión:

$$M_{wing} = 0,0051 \cdot (W_{dg} \cdot N_z)^{0,557} \cdot S_w^{0,649} \cdot A^{0,5} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)_{root}^{-0,4} \cdot (1 + \lambda)^{0,1} \cdot (\cos \beta)^{-1,0} \cdot S_{csw}^{0,1} \quad (2.2)$$

W_{dg} equivale al peso del avión en vuelo con la máxima carga de agua y del 50-60% de combustible. Para este parámetro se utiliza el máximo peso al despegue (W_{TOW}): $W_{dg} = 43850 \text{ lb}$ (19890 Kg)

S_w corresponde al área del ala: $S_w = c \cdot b = 1080,05 \text{ ft}^2$ (100,33 m^2)

Se denomina A a la relación de aspecto o también llamada proporción de aspecto o razón de aspecto.

La relación de aspecto de un ala es la longitud del ala en comparación con la amplitud (cuerda) del ala. Una alta relación de aspecto indica alas largas y estrechas, mientras que una relación de aspecto baja indica alas cortas y gruesas.

En la mayoría de los aviones, la cuerda varía a lo largo del ala por lo que la relación de aspecto se define como el cuadrado de la envergadura, dividida por el área de la planta del ala. En el caso a estudiar, como el Canadair 415 posee alas rectas la relación de aspecto es la siguiente:

$$A = \frac{b}{c} = \frac{28,63}{3,54} = \frac{93,93}{11,614} = 8,09 []$$

El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$ hace referencia a la relación del espesor con la cuerda en la base del ala.

$$\left(\frac{t}{c}\right)_{root} = \left(\frac{1,84}{11,6}\right) = 0,16 []$$

λ corresponde a la conicidad del ala: $\lambda = 0$.

Λ equivale al ángulo barrido por el ala, en el caso del CL 415 al ser un ala recta $\Lambda = 0$

S_{csw} corresponde al área de la superficie de control; es decir, el área de los alerones: $S_{csw} = w_{aleron} \cdot l_{aleron} = 2,90 \cdot 14,04 = 40,72 \text{ ft}^2$ (3,78 m^2)

Sustituyendo en la ecuación (2.2), se obtiene un masa estimado del ala de:

$$M_{wing} = 0,0051 \cdot (28400 \cdot 3,75)^{0,557} \cdot 1080,05^{0,649} \cdot 8,09^{0,5} \cdot 0,16^{-0,4} \cdot 1^{0,1} \cdot 40,716^{0,1} = 2569,28 lb$$

(1165,41 Kg).

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 11421,02 N$$

Como se considera una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala, es decir de la semienvergadura.

$$W_{wing} = R(x) = \frac{11421,02}{14,32} = 797,56 \frac{N}{m}$$



2.2.4. Fuerza de sustentación

La sollicitación principal a la que están sometidas las alas del avión es la acción de la fuerza de sustentación ($l(x)$) que le permite despegar y mantenerse en vuelo. Según Dan Doherty ésta se asume como una carga distribuida que sigue una distribución elíptica a lo largo de la longitud del ala, resultando la siguiente expresión:

$$l(x) = k \cdot \sqrt{Long^2 - x^2} \frac{N}{m} \quad (2.3)$$

Donde “k” es el coeficiente de sustentación, “Long” la longitud del ala, y “x” la posición a lo largo de la misma partiendo desde el empotramiento.

2.2.5. Representación de las fuerzas

En la figura 2.5 se muestra sobre el alzado del avión un esquema de las fuerzas a las que está sometido, presentadas en los puntos anteriores. Para la representación no se ha aplicado escala, por lo tanto las magnitudes representadas tienen únicamente un carácter orientativo.

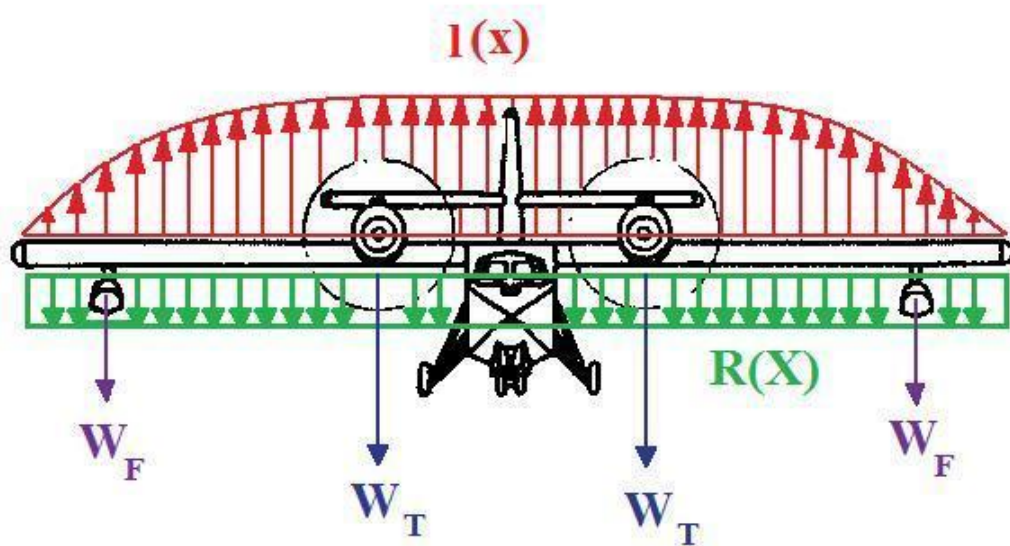


Figura 2.5: Esquema de fuerzas al que está sometido el avión.

Al ser la estructura simétrica, tanto de forma como de cargas, para los cálculos se utilizará únicamente el ala derecha del avión.

Se modelará como una viga de perfil delgado de forma rectangular empotrada en su extremo izquierdo; simulando de esta forma la unión con el avión, figura 2.6.

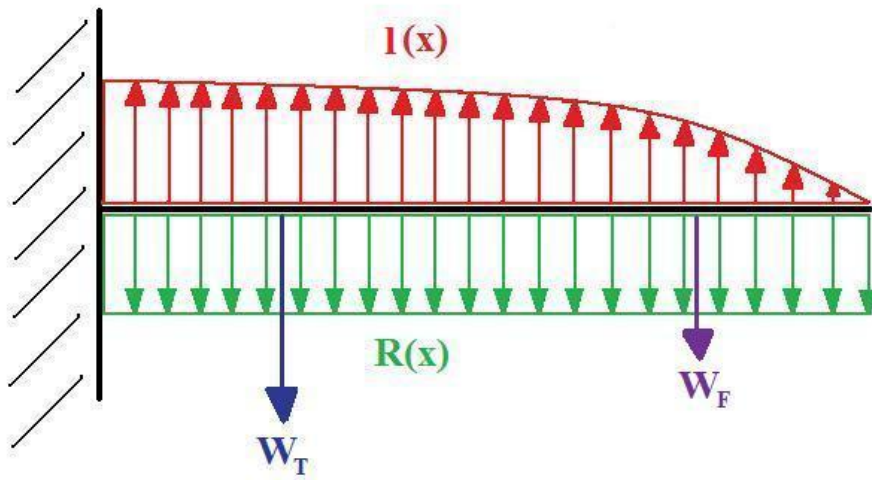


Figura 2.6: Esquema de fuerzas simbólico equivalente al que sufre el ala del avión.

2.3. Descripción de carga en vuelo nivelado

A continuación se muestra la fuerza de sustentación necesaria para que el avión pueda encontrarse en vuelo nivelado; es decir, que se mantenga con una altitud constante.

Para este caso la fuerza de sustentación debe ser igual al peso del avión, para mantener de esta forma el equilibrio de la aeronave, figura 2.7.

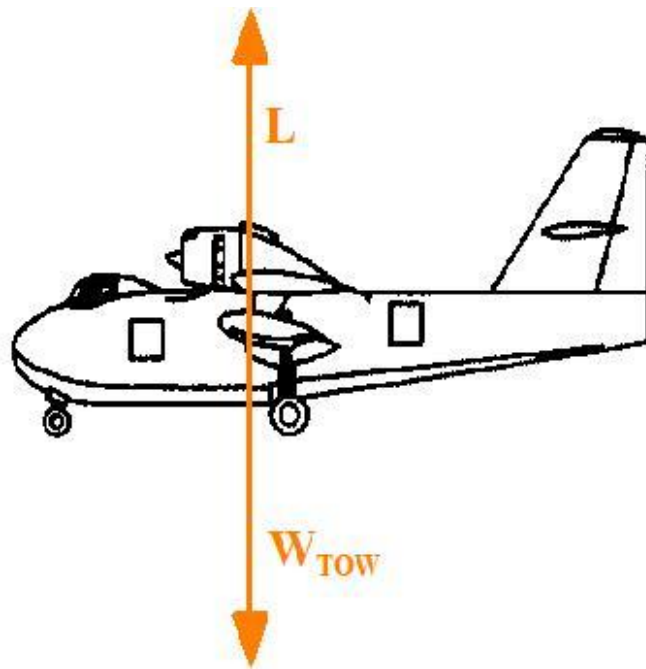


Figura 2.7: Esquema del avión en vuelo nivelado.

Realizando equilibrio de fuerzas verticales:

$$\sum F_v = 0$$

$$L - W_{TOW} = 0$$

$$n = \frac{L}{W_{TOW}} = 1$$

En esta situación el factor de carga límite es igual a la unidad, y por lo tanto:

$$L = W_{TOW} \quad (2.4)$$

Con la hipótesis mostrada en la ecuación (2.4) se calculará la fuerza de sustentación.

Como el motivo de estudio es únicamente un ala, se sustituirá en la ecuación (2.3) el término Long por la semienvergadura, y el cálculo del coeficiente se realizará igualando a la mitad del peso del avión.

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2}$$

$$\int_0^{(b/2)} k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot \partial x = \frac{W_{tow}}{2}$$

De esta forma, el coeficiente de sustentación tendrá el valor:

$$k = \frac{W_{dg}/2}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot \partial x} = \frac{194922/2}{\int_0^{(28,63/2)} \sqrt{(28,63/2)^2 - x^2} \cdot \partial x} = \frac{97461}{\int_0^{14,32} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x} = \frac{97461}{161,06} = 605,12$$

Resolviendo la integral de manera matemática se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{14,32} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x &= \int_0^{14,32} 14,32 \cdot \sqrt{1 - (x/14,32)^2} \cdot \partial x = \\ &= 14,32 \cdot \int_0^{14,32} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cdot 14,32 \cdot \cos t \cdot \partial t = \\ &= 14,32^2 \cdot \int_0^{14,32} \cos^2 t \cdot \partial t = 14,32^2 \int_0^{14,32} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot \partial t = \\ &= \frac{14,32^2}{2} \cdot \left[t + \int_0^{14,32} \cos 2t \cdot \partial t \right] = \frac{14,32^2}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \cdot \text{sen} 2t \right] \Bigg|_0^{14,32} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{14,32^2}{2} \cdot t + \frac{14,32^2}{4} \cdot \operatorname{sen} 2t \right) \Big|_0^{14,32} = \left(\frac{14,32^2}{2} \cdot t + \frac{14,32^2}{4} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{cost} \right) \Big|_0^{14,32} = \\ &= \frac{14,32^2}{2} \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{14,32} + \frac{14,32 \cdot x}{2} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{14,32^2} \right)} \end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza de sustentación que permite al avión mantenerse en vuelo nivelado, sin ascender o descender, es la siguiente:

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 605,12 \cdot \sqrt{14,32^2 - x^2}$$

2.4. Descripción de carga en maniobra simétrica.

En esta situación el avión asciende con una aceleración a , figura 2.8.

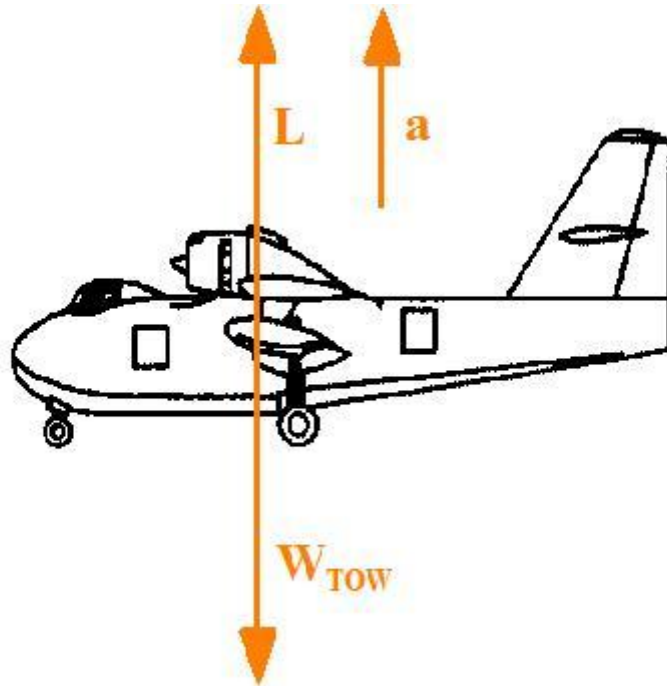


Figura 2.8: Esquema del avión en maniobra simétrica.

En esta situación el balance de fuerzas verticales es el siguiente:

$$\sum F_v = m \cdot a$$

$$L - W_{TOW} = \frac{W_{TOW}}{g} \cdot a$$

$$n = \frac{L}{W_{TOW}} = 1 + \frac{a}{g}$$

Según la FAR 25 el factor de carga límite alcanza un valor de 2,5.

$$\text{En este caso } L = 2,5 \cdot W_{TOW} \quad (6.1)$$

Según la ecuación (2.5) se prosigue a calcular la fuerza de sustentación:

$$\int_0^{(b/2)} k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx = \left(W_{TOW} / 2 \right) \cdot 2,5$$

De esta forma, resolviendo la ecuación anterior, el coeficiente de sustentación tendrá el valor de:

$$k = \frac{\left(W_{dg} / 2 \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{\left(194922 / 2 \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(28,63/2)} \sqrt{(28,63/2)^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{243652,5}{\int_0^{14,315} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{243652,5}{161,06} = 1512,81$$

Por tanto:

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 1512,81 \cdot \sqrt{14,32^2 - x^2}$$

3. Esfuerzos sobre el ala

3.1. Cálculos

$$0 < x < 2,50$$

En este punto se plantea el equilibrio de fuerzas y momentos en el primer tramo, el correspondiente a los 2 metros y medio desde el extremo libre del ala; es decir, antes de considerar la presencia de la carga puntual debida al flotador.

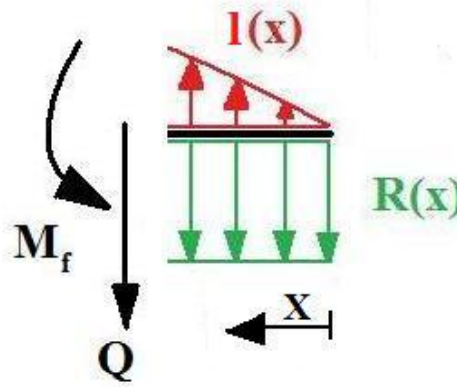


Figura 3.1: Esfuerzo cortante y flector del primer tramo ($0 < x < 2,5$)

$$Q(x) + R(x) \cdot x - \int_0^x S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.1)$$

$$M_f(x) - R(x) \cdot x \cdot \frac{x}{2} + \frac{4 \cdot x}{3 \cdot \pi} \int_0^x S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.2)$$

El centro de gravedad de un cuarto de elipse, siendo el parámetro “a” su base se define como: $\frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.1) y (3.2) para ambos tipos de vuelo se obtiene:

Vuelo nivelado

$$Q(x) = -797,56 \cdot x + 605,12 \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +797,56 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{605,12 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +398,78 \cdot x^2 - 256,82 \cdot x \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

Maniobra simétrica

$$Q(x) = -797,56 \cdot x + 1512,81 \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +797,56 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1512,81 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +398,78 \cdot x^2 - 642,06 \cdot x \cdot \int_0^x \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

2,50 < x < 11,90

Planteando el equilibrio de fuerzas y momentos en el segundo tramo, el cual engloba hasta 11,90 metros, dato medido desde el extremo libre del ala. Es decir antes de la presencia de la carga puntual debida al peso del motor.

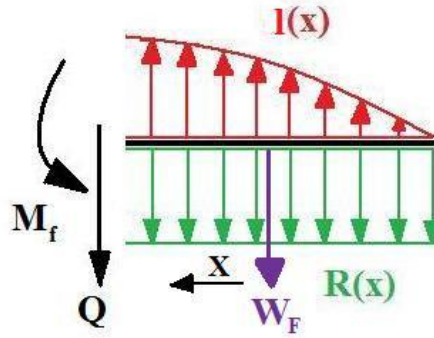


Figura 3.2: Esfuerzo cortante y flector del segundo tramo (2,5 < x < 11,90)

$$Q(x) + W_F + R(x) \cdot (x + 2,5) - \int_0^{x+2,5} S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.3)$$

$$M_f(x) - W_F \cdot x - R(x) \cdot \frac{(x + 2,5)^2}{2} + \frac{4 \cdot (x + 2,5)^{x+2,5}}{3 \cdot \pi} \int_0^{x+2,5} S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.4)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.3) y (3.4) para ambos tipos de vuelo se obtiene:

Vuelo nivelado

$$Q(x) = -1519 - 797,56 \cdot (x + 2,5) + 605,12 \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +1519 \cdot x + 797,56 \cdot \frac{(x + 2,5)^2}{2} - \frac{605,12 \cdot 4 \cdot (x + 2,5)}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +1519 \cdot x + 398,78 \cdot (x + 2,5)^2 - 256,82 \cdot (x + 2,5) \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

Maniobra simétrica

$$Q(x) = -1519 - 797,56 \cdot (x + 2,5) + 1512,81 \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +1519 \cdot x + 797,56 \cdot \frac{(x + 2,5)^2}{2} - \frac{1512,81 \cdot 4 \cdot (x + 2,5)}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +1519 \cdot x + 398,78 \cdot (x + 2,5)^2 - 642,06 \cdot (x + 2,5) \cdot \int_0^{x+2,5} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

11,90 < x < 14,32

Planteando el equilibrio de fuerzas y momentos en el último tramo, el cual engloba el ala completa se obtiene:

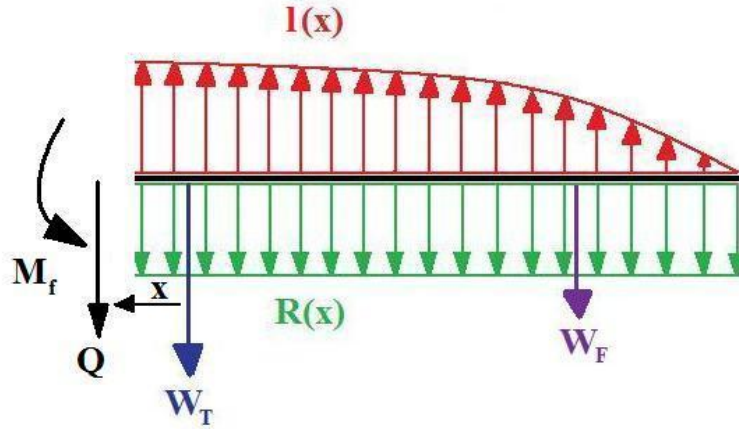


Figura 3.3: Esfuerzo cortante y flector del último tramo (11,90 < x < 14,32)

$$Q(x) + W_T + W_F + R(x) \cdot (x + 11,895) - \int_0^{x+11,9} S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.5)$$

$$M_f(x) - W_T \cdot x - W_F \cdot (x + 9,4) - R(x) \cdot (x + 11,9) \cdot \frac{(x + 11,9)}{2} + \frac{4 \cdot (x + 11,9)}{3 \cdot \pi} \int_0^{x+11,9} S(x) \cdot \partial x = 0 \quad (3.6)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.5) y (3.6) para ambos tipos de vuelo se obtiene:

Vuelo nivelado

$$Q(x) = -11620,15 - 1519 - 797,56 \cdot (x + 11,90) + 605,12 \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$Q(x) = -13139,15 - 797,56 \cdot (x + 11,90) + 605,12 \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +11620,15 \cdot x + 1519 \cdot (x + 9,4) + 797,56 \cdot \frac{(x + 11,90)^2}{2} - \frac{4 \cdot 605,12 \cdot (x + 11,90)}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +11620,15 \cdot x + 1519 \cdot (x + 9,4) + 398,78 \cdot (x + 11,90)^2 - 256,82 \cdot (x + 11,90) \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

Maniobra simétrica

$$Q(x) = -11620,15 - 1519 - 797,56 \cdot (x + 11,90) + 1512,81 \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$Q(x) = -13139,15 - 797,56 \cdot (x + 11,90) + 1512,81 \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +11620,15 \cdot x + 1519 \cdot (x + 9,4) + 797,56 \cdot \frac{(x + 11,90)^2}{2} - \frac{4 \cdot 1512,81 \cdot (x + 11,90)}{3 \cdot \pi} \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

$$M_f(x) = +11620,15 \cdot x + 1519 \cdot (x + 9,4) + 398,78 \cdot (x + 11,90)^2 - 642,06 \cdot (x + 11,90) \cdot \int_0^{x+11,90} \sqrt{14,32^2 - x^2} \cdot \partial x$$

3.2. Valores críticos de diseño

En este apartado se evaluará la magnitud de los esfuerzos calculados en el punto 3. Se puede observar un salto en los diagramas de esfuerzos cortantes debido a la presencia de cargas puntuales causadas por la existencia del flotador y del motor. Al ser el peso del motor bastante superior al peso del flotador (11620,15N frente a 1519N), la primera discontinuidad es mayor que la segunda, siendo este último prácticamente despreciable. A continuación se estudian las condiciones de vuelo nivelado y de maniobra simétrica para conocer la situación más crítica que marcará el perfil estructural a emplear en la construcción del avión.

3.2.1. Vuelo nivelado

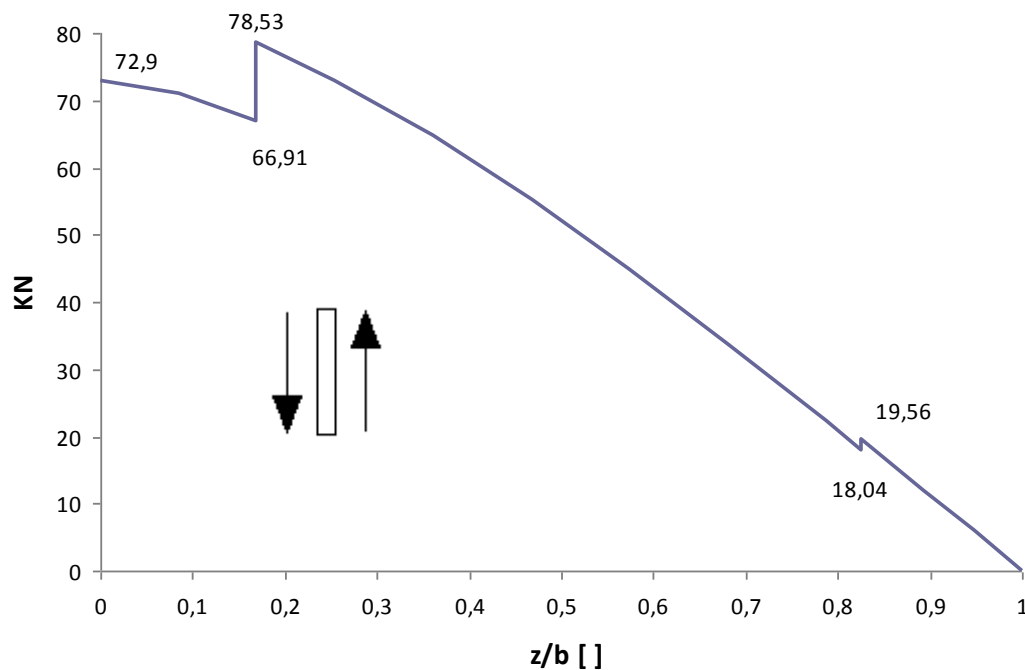


Figura 3.4: Diagrama de esfuerzos cortantes en vuelo nivelado.

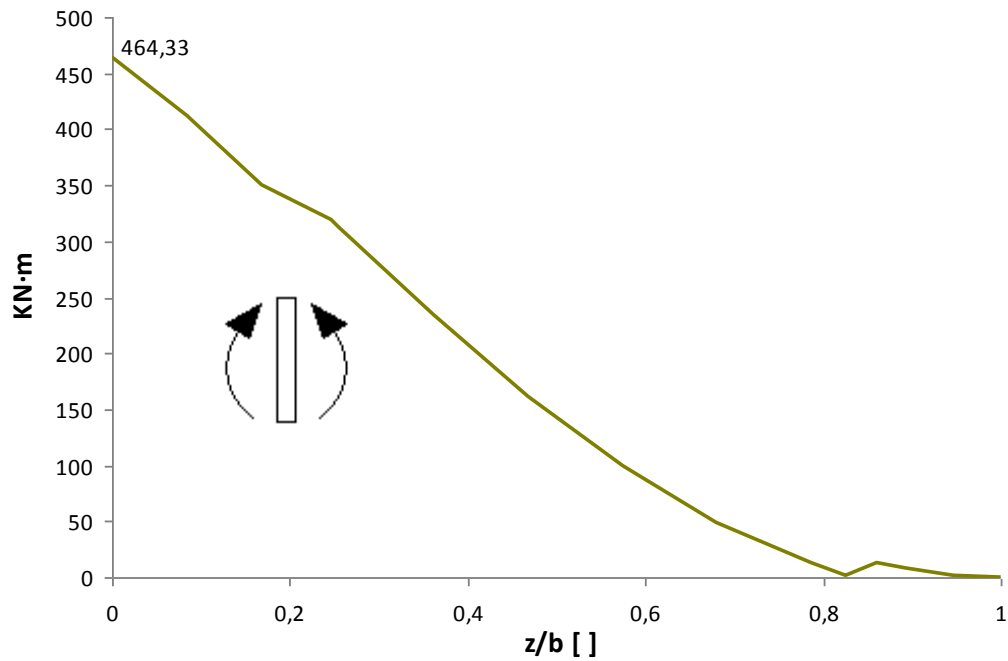


Figura 3.5: Diagrama de momentos flectores en vuelo nivelado.

3.2.2. Maniobra simétrica

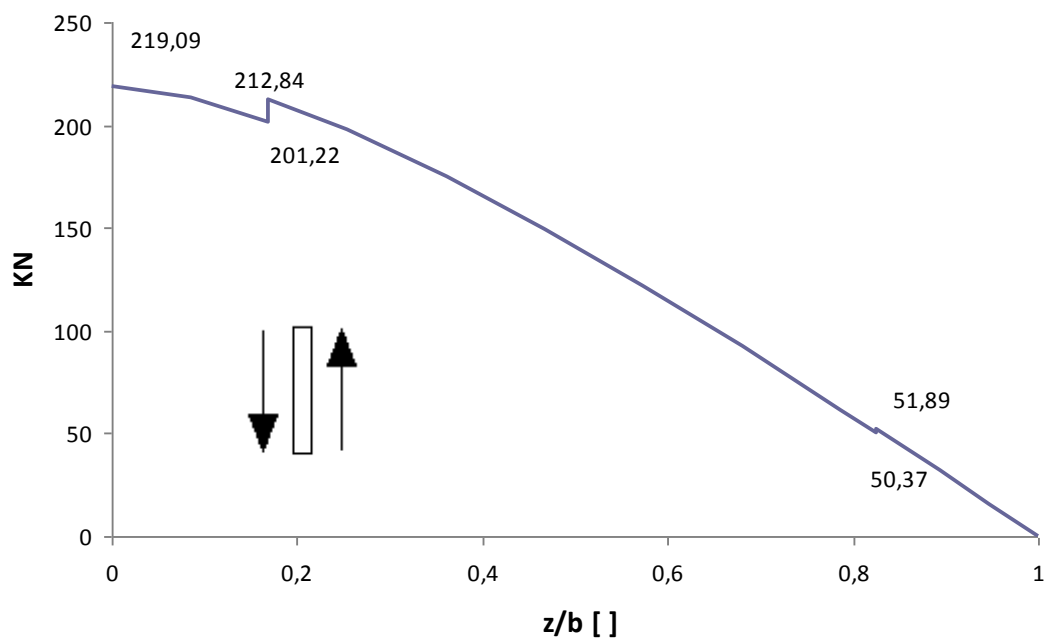


Figura 3.6: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica.

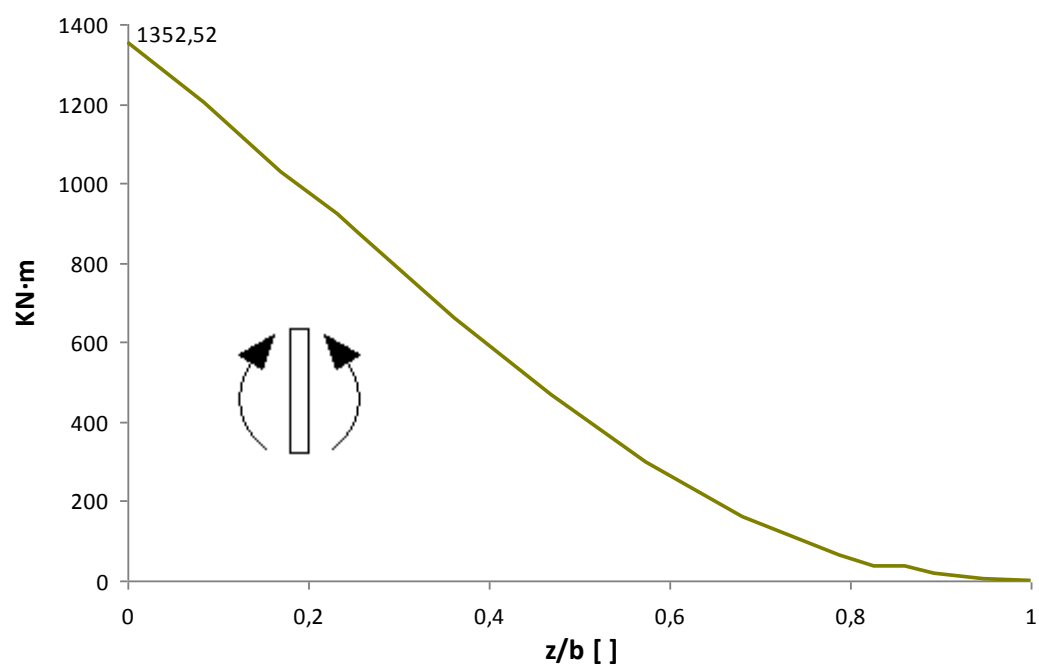


Figura 3.7: Diagrama de momentos flectores en maniobra simétrica.

3.2.3. Discusión de resultados

Las distintas condiciones de vuelo producen estados tensionales diferentes sobre el bastidor que hay que determinar con el fin de conocer las condiciones críticas. De este modo, en la situación de vuelo nivelado, el esfuerzo cortante crítico se produce en el lugar donde está ubicado el motor, y tiene un valor de $78,53KN$. El momento flector máximo se produce, como era de esperar, en el empotramiento, con un valor de $464,33KN \cdot m$. En maniobra simétrica tanto el cortante como el momento críticos se producen en el empotramiento adquiriendo el primero un valor de $219,09KN$ y el segundo $1352,53KN \cdot m$.

Los esfuerzos en el ala resultan mayores en maniobra simétrica que en vuelo nivelado pues, como indica la ecuación (2.5), en el primer caso la fuerza de sustentación debe ser igual a 2,5 veces el peso del avión mientras que en la segunda, según la ecuación (2.4) ambos términos son iguales.

Al ser en maniobra simétrica la fuerza de sustentación mayor que en vuelo nivelado debe ser este caso el que marque las condiciones de trabajo y, por tanto, sobre las que se base la dimensionalización del perfil.

En conclusión, el punto crítico de diseño es el empotramiento y se produce cuando el avión se encuentra en maniobra simétrica. Los valores máximos de esfuerzos cortante y flector que se considerarán para dimensionar el perfil son los siguientes:

$$Q_y = 219,09KN$$

$$M_x = 1352,52KN \cdot m$$

4. Análisis de secciones de pared delgada

En este apartado se describe la teoría de secciones de pared delgada sometidos a esfuerzos cortantes y flectores. Para ello se mantiene la estructura presentada en Garrido y Foces (1994) y en Navarro (Elasticidad 2009)

Relaciones cinemáticas

A fin de definir la cinemática de las barras con sección de pared delgada sometidas a tracción (compresión)- flexión se considerará un sistema de coordenadas curvilíneas que se adapte a la forma geométrica de cada sección. Así con referencia a la figura 4.1, se tomará la coordenada curvilínea s sobre la línea media del perfil con origen en punto arbitrario y se definirá un triedro de referencia ortogonal $O'zns$ en cada punto de dicha línea. El eje local $O'z$ es paralelo al eje longitudinal de la barra, el $O's$ es tangente a la línea media en O' y el $O'n$, que al igual que el $O's$ está contenido en el plano de la sección, es normal a $O's$.

Se parte de las siguientes hipótesis cinemáticas:

$$u_y(x, y, z) \approx u_y(0, 0, z) = u_{y0}(z) \quad (4.1)$$

$$u_x(x, y, z) \approx u_x(0, 0, z) = u_{x0}(z) \quad (4.2)$$

$$u_z(x, y, z) \approx u_z(z, s) \quad (4.3)$$

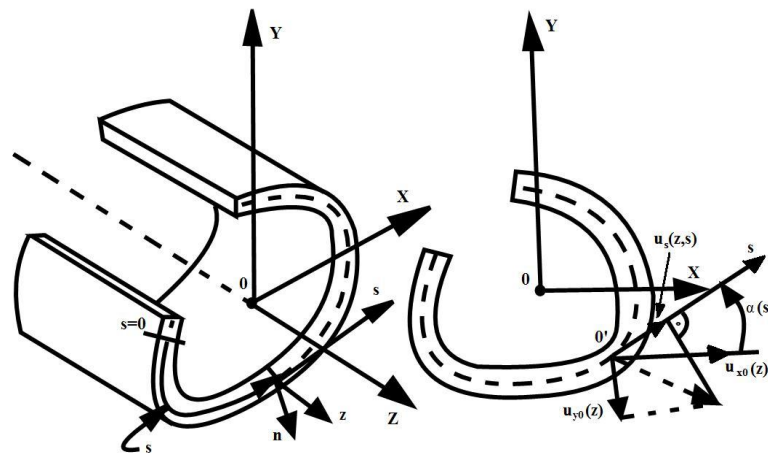


Figura 4.1: Triedro de referencia ortogonal

La aproximación relativa a los desplazamientos normales (ecuación (4.3)), que se justifica en base a los pequeños espesores de las paredes, equivale a suponer que el desplazamiento u_z es constante en el espesor ($u_z(z, s)$, figura 4.1).

$$u_z(x, y, z) = u_{z0}(z) - \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot y - \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot x + \int_0^y \gamma_{zy}(z, y) \cdot \partial y + \int_0^x \gamma_{zx}(z, x) \cdot \partial x \quad (4.4)$$

Ahora el objetivo es buscar una ecuación análoga a (4.4) para el desplazamiento $u_z(z, s)$ en secciones de pared delgada. La ecuación de compatibilidad asociada a ($\gamma_{zs}(z, s)$) es:

$$\gamma_{zs}(z, s) = \frac{\partial u_z(z, s)}{\partial s} + \frac{\partial u_s(z, s)}{\partial z}$$

Integrando:

$$u_z(z, s) = - \int_0^s \frac{\partial u_s(z, s)}{\partial z} \cdot \partial s + \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s + F(z) \quad (4.5)$$

Respecto a la primera integral, observando la figura 4.1.b se obtiene:

$$u_s(z, s) = -u_{y0}(z) \cdot \sin \alpha(s) + u_{x0}(z) \cdot \cos \alpha(s) \quad (4.6)$$

Siendo $\alpha(s)$ el ángulo que forma la tangente a la línea media de la sección en el punto considerado con el eje Ox. Considerando que $\cos \alpha(s) = \frac{\partial x}{\partial s}$ y que $\sin \alpha(s) = -\frac{\partial y}{\partial s}$, la ecuación anterior será:

$$u_s(z, s) = +u_{y0}(z) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + u_{x0}(z) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \quad (4.7)$$

Derivando respecto de z se obtiene el integrando de la primera integral de la ecuación (4.5):

$$\frac{\partial u_s(z, s)}{\partial z} = \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$$

Y la integral valdrá:

$$\int_0^s \frac{\partial u_s(z, s)}{\partial z} \cdot \partial s = \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot (y(s) - y(0)) + \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot (x(s) - x(0))$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.5):

$$u_z(z, s) = F(z) - \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot (y(s) - y(0)) - \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} (z(s) - z(0)) + \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s \quad (4.8)$$

Particularizando para $s = 0$, se deduce que $F(z)$ es el valor de u_z en el origen de la coordenada curvilínea s ($F(z) = u_z(z, 0)$). Agrupando términos dependientes y no dependientes de s :

$$u_z(z, s) = u_z(z, 0) + \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot y(0) + \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} x(0) - \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot y(s) - \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot x(s) + \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s \quad (4.9)$$

La suma de los tres primeros términos del segundo miembro de la ecuación anterior es una cantidad constante que representa una translación $u_{z0}(z)$ de todos puntos de la sección.

$$u_z(z, s) = u_{z0}(z) - \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot y(s) - \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot x(s) + \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s \quad (4.10)$$

Se desprecian los desplazamientos normales originados por las deformaciones angulares asociadas a los esfuerzos cortantes.

$$u_z(z, s) = u_{z0}(z) - \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \cdot y(s) - \frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z} \cdot x(s) \quad (4.11)$$

O bien:

$$u_z(z, s) = u_{z0}(z) + \phi_x(z) \cdot y(s) + \phi_y(z) \cdot x(s) \quad (4.12)$$

Por consiguiente, la cinemática de la barra consiste en unas translaciones $(u_{z0}(z), u_{y0}(z), u_{x0}(z))$ de toda la sección y en unos giros $(\phi_y(z), \phi_x(z))$ alrededor de los ejes Oy y Ox. Estos giros son iguales y de signo contrario a las pendientes de la línea media deformada de la barra, en la sección $\left(\frac{\partial u_{x0}(z)}{\partial z}, \frac{\partial u_{y0}(z)}{\partial z} \right)$.

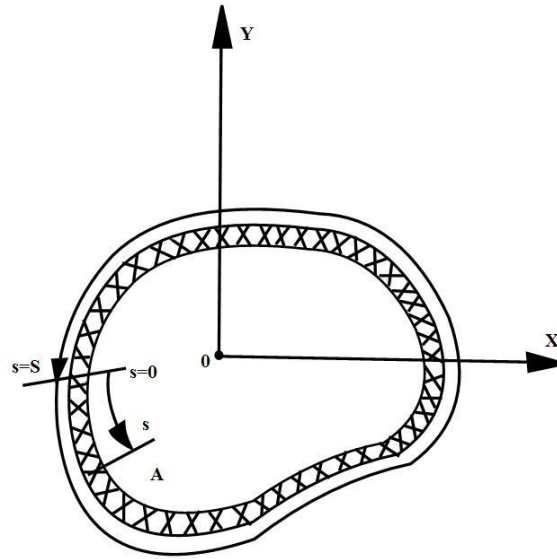


Figura 4.2: Sección cerrada de pared delgada.

Por último, se comprobará que la integral de las deformaciones angulares a lo largo de todo el perímetro (S) de la línea media es nula en secciones cerradas de pared delgada (Figura 4.2). En efecto, el desplazamiento del punto A es único y la ecuación (4.10) debe implicar valores iguales para $u_z(z, s)$ y para $u_z(z, s + S)$:

$$u_z(z, s + S) - u_z(z, s) = 0$$

Por tanto:

$$\int_0^{s+S} \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s - \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s = \int_0^{s+S} \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s = \int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s = 0 \quad (4.13)$$

Esta propiedad será utilizada más adelante

Cálculo de tensiones

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N_z(z)}{A} + \frac{M_x(z) \cdot I_y + M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot y + \frac{-M_y(z) \cdot I_x - M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot x \quad (4.14)$$

A continuación se deducen las ecuaciones relativas al cálculo de tensiones en secciones de pared delgada. Al igual que en secciones macizas, las tensiones normales se determinan aplicando la ecuación (4.14). Así, partiendo de la ecuación de compatibilidad relativa al alargamiento unitario $\varepsilon_{zz}(z, s)$:

$$\varepsilon_{zz}(z, s) = \frac{\partial u_z(z, s)}{\partial z} \quad (4.15)$$

Aplicando la ecuación de comportamiento:

$$\sigma_{zz}(z, s) = E \cdot \frac{\partial u_z(z, s)}{\partial z} \quad (4.16)$$

Y considerando la ecuación (4.12):

$$\sigma_{zz}(z, s) = E \cdot \left(\frac{\partial u_{z0}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \phi_x(z)}{\partial z} \cdot y(s) + \frac{\partial \phi_y(z)}{\partial z} \cdot x(s) \right) \quad (4.17)$$

La equivalencia estática de $\sigma_{zz}(z, s)$ con $N_z(z)$, $M_y(z)$ y $M_x(z)$ conduce de nuevo a las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20).

$$\frac{\partial u_{z0}(z)}{\partial z} = \frac{N_z(z)}{A \cdot E} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \phi_y(z)}{\partial z} = \frac{-M_y(z) \cdot I_x - M_x(z) \cdot P_{xy}}{E \cdot (I_y \cdot I_x - P_{xy}^2)} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \phi_x(z)}{\partial z} = \frac{M_x(z) \cdot I_y + M_y(z) \cdot P_{xy}}{E \cdot (I_y \cdot I_x - P_{xy}^2)} \quad (4.20)$$

Finalmente, considerando estas ecuaciones en la (4.17), se llega a la ecuación (4.14) con $y \equiv y(s)$ y $x \equiv x(s)$:

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N_z(z)}{A} + \frac{M_x(z) \cdot I_y + M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot y + \frac{-M_y(z) \cdot I_x - M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot x$$

$$\sigma_{zz}(z, s) = \frac{N_z(z)}{A} + \frac{M_x(z) \cdot I_y + M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot y(s) + \frac{-M_y(z) \cdot I_x - M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_y \cdot I_x - P_{xy}^2} \cdot x(s) \quad (4.21)$$

El cálculo de tensiones tangenciales presenta diferencias respecto al caso de secciones macizas. En perfiles de pared delgada solamente tiene sentido considerar la tensión tangencial $\tau_{zs}(z, s)$ en función de los esfuerzos cortantes $Q_x(z)$ y $Q_y(z)$, se planteará el equilibrio de fuerzas según la dirección Oz en el trozo de barra representado en la figura 4.3.

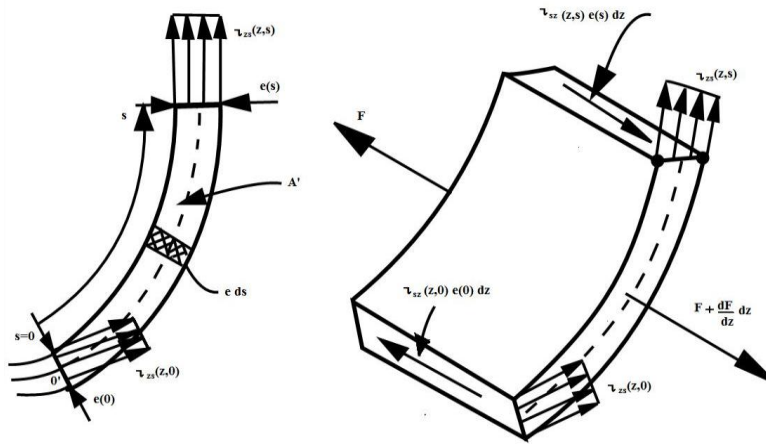


Figura 4.3: Equilibrio de fuerzas en un trozo de barra.

$$F + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \partial z - F + \tau_{sz}(z, s) \cdot e(s) \partial z = \tau_{sz}(z, 0) \cdot e(0) \cdot \partial z$$

Simplificando

$$\tau_{sz}(z, s) \cdot e(s) = \tau_{sz}(z, 0) \cdot e(0) - \frac{\partial F}{\partial z} \quad (4.22)$$

Siendo F la fuerza resultante de las tensiones normales en el área A':

$$F = \int_{A'} \tau_{zz}(z, s) \cdot \partial A$$

Por equilibrio $\tau_{sz}(z, s) = \tau_{sz}(z, 0)$. Además como justificó Garrido en el capítulo 3 se han despreciado las fuerzas superficiales Z_z en la ecuación de equilibrio (4.22). Considerando el valor de F:

$$\tau_{zs}(z, s) \cdot e(s) = \tau_{zs}(z, 0) \cdot e(0) - \frac{\partial \left(\int_A \sigma_z(z, s) \cdot \partial A \right)}{\partial z} \quad (4.23)$$

Reorganizando los términos de la (4.21) se obtiene:

$$\sigma_z = M_x(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot I_y - x(s) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] + M_y(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot P_{xy} - x(s) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] \quad (4.24)$$

El esfuerzo axil se desprecia.

Para resolver la ecuación (4.23) en primer lugar se integra la ecuación (4.24) y a posteriori se deriva.

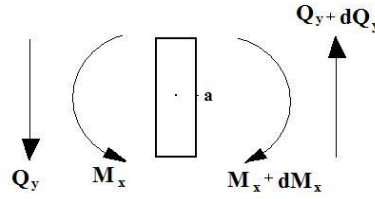
$$\begin{aligned} & \int_A \left[M_x(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot I_y - x(s) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] + M_y(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot P_{xy} - x(s) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] \right] \cdot \partial A = \\ & = \int_{A_1} \frac{M_x(z) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot y(s) \cdot \partial A_1 - \int_{A_2} \frac{M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot x(s) \cdot \partial A_2 + \\ & + \int_{A_3} \frac{M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot y(s) \cdot \partial A_3 - \int_{A_4} \frac{M_y(z) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot x(s) \cdot \partial A_4 \end{aligned}$$

$$\text{Como } m_x^*(s) = \int y(s) \cdot \partial A \quad m_y^*(s) = \int x(s) \cdot \partial A$$

Se sustituye de la ecuación anterior obteniendo como resultado de la integral:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[M_x(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot I_y - x(s) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] + M_y(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot P_{xy} - x(s) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] \right] \cdot \partial A = \\ & = \frac{M_x(z) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) - \frac{M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) + \frac{M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) - \frac{M_y(z) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) \end{aligned} \quad (4.25)$$

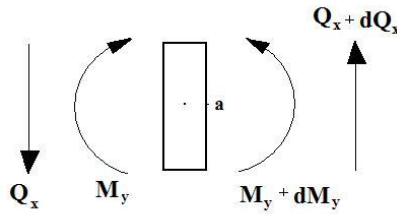
Para proceder a derivar la ecuación (4.24) se calcula mediante equilibrio en una rebanada el valor de la derivada de los momentos, tanto en el eje X como en el eje Y.



Tomando momentos en el punto "a" se obtiene:

$$M_x + dM_x - M_x - Q_y \cdot dz = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = Q_y$$



$$M_y + dM_y - M_y + Q_x \cdot dz = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} = -Q_x$$

$$\frac{\partial \left(\frac{M_x(z) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) - \frac{M_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) + \frac{M_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) - \frac{M_y(z) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) \right)}{\partial z} =$$

$$= \frac{Q_y(z) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) - \frac{Q_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) - \frac{Q_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_x^*(s) + \frac{Q_x(z) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \cdot m_y^*(s) \quad (4.26)$$

Volviendo a la ecuación (4.23):

$$\tau_{zs}(z,s) \cdot e(s) = \tau_{zs}(z,0) \cdot e(0) - \left(\frac{Q_y(z) \cdot I_y - Q_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right) \cdot m_x^*(s) - \left(\frac{Q_x(z) \cdot I_x - Q_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right) \cdot m_y^*(s)$$

$$q_v(z,s) = \tau_{zs}(z,s) \cdot e(s) \quad (4.27)$$

Se denomina q_v al flujo cortante, al flujo de tensiones tangenciales y es igual a la tensión tangencial multiplicada por el espesor.

$$q_v(z,s) = q_v(z,0) - K_x(Q_x, Q_y) \cdot m_x^*(s) - K_y(Q_x, Q_y) \cdot m_y^*(s) \quad (4.28)$$

Donde:

$$K_x = \frac{Q_y(z) \cdot I_y - Q_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2}$$

$$K_y = \frac{Q_x(z) \cdot I_x - Q_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2}$$

En perfiles de sección abierta; es decir, cuando su línea media no es una curva cerrada, dado que por lo general no suelen existir fuerzas tangenciales aplicadas en los bordes, si se toma el origen de coordenada curvilínea s en uno de los extremos, se tiene que: $\tau_{zs}(z,0) = \tau_{zs}(z,S) = 0$

En este caso, la ecuación (4.28) es:

$$q_v(z,s) = -K_x(Q_x, Q_y) \cdot m_x^*(s) - K_y(Q_x, Q_y) \cdot m_y^*(s) \quad (4.29)$$

Cuando el perfil es de sección cerrada, el flujo de tensiones tangenciales viene dado por la siguiente ecuación:

$$q_v(z,s) = q_v(z,0) + q_{vA}(z,s) \quad (4.30)$$

Siendo $q_{vA}(z,s)$ el flujo en s si la sección estuviera abierta en $s=0$ (la elección del origen de coordenadas s es arbitraria).

$$q_{vA}(z, s) = -K_x(Q_x, Q_y) \cdot m_x^*(s) - K_y(Q_x, Q_y) \cdot m_y^*(s) \quad (4.31)$$

El cálculo de $q_{vA}(z, s)$ es directo. Para determinar $q_v(z, 0)$ se usa la propiedad que se dedujo anteriormente (ecuación (4.13))

$$\int_0^s \gamma_{zs}(z, s) \cdot \partial s = \int_0^s \frac{\tau_{zs}(z, s)}{G} \cdot \partial s = \int_0^s \frac{qv(z, s)}{e(s) \cdot G} \cdot \partial s = 0$$

Considerando la ecuación (4.30)

$$\int_0^s \frac{q_{vA}(z, s)}{e(s)} \cdot \partial s + q_v(z, 0) \cdot \int_0^s \frac{1}{e(s)} \cdot \partial s = 0$$

Por tanto:

$$q_v(z, 0) = \frac{-\int_0^s \frac{q_{vA}(z, s)}{e(s)} \cdot \partial s}{\int_0^s \frac{1}{e(s)} \cdot \partial s} \quad (4.32)$$

En definitiva, para calcular las tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a los esfuerzos cortantes que actúan en una sección cerrada de pared delgada, hay que definir en primer lugar el origen de la coordenada curvilínea s y suponer que el perfil está abierto en dicho origen. Después se calcula $q_{vA}(z, s)$ aplicando la ecuación (4.31) y finalmente, tras deducir $q_v(z, 0)$ usando la (4.32), se puede determinar el flujo $q_v(z, s)$ mediante la expresión (4.30).

5. Aplicación al análisis del cajón de torsión

5.1. Introducción

El perfil del cajón de torsión se aproxima a una estructura metálica rectangular de pared delgada de espesor constante. La característica común de estos perfiles es que las dimensiones de los espesores de las paredes son mucho menores que la menor de las otras dimensiones que definen la geometría de la sección. Se considera incluida en este grupo de perfiles a toda barra cuya sección tenga espesores de pared que sean como máximo la décima parte de la menor dimensión característica.

Con este tipo de barras se puede proyectar estructuras muy resistentes y de peso reducido, pues la forma geométrica de la sección de cada barra se diseña de modo que la capacidad resistente del material sea aprovechada convenientemente en función de la clase de esfuerzos que debe soportar.

La sección del cajón de torsión es tal y como se muestra a continuación, figura 5.1:

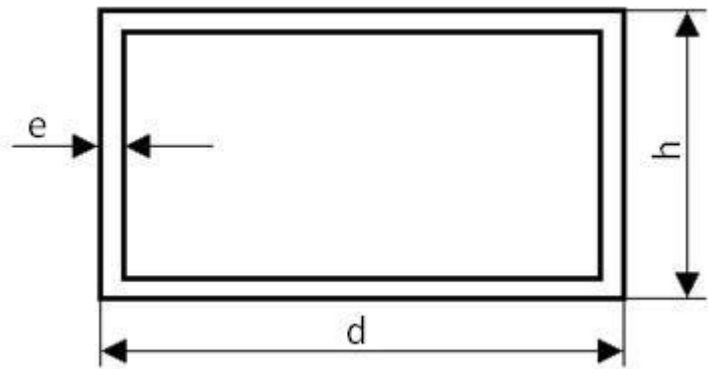


Figura 5.1. Perfil del cajón de torsión.

Donde “e” es el espesor de la estructura, “d” es la distancia entre largueros, y “h” es el espesor del perfil.

Ambas últimas longitudes se obtienen del cutaway, figura 5.2, la primera pintada de azul y la segunda de rojo.

$$d = 1,14m$$

$$h = 0,56m$$

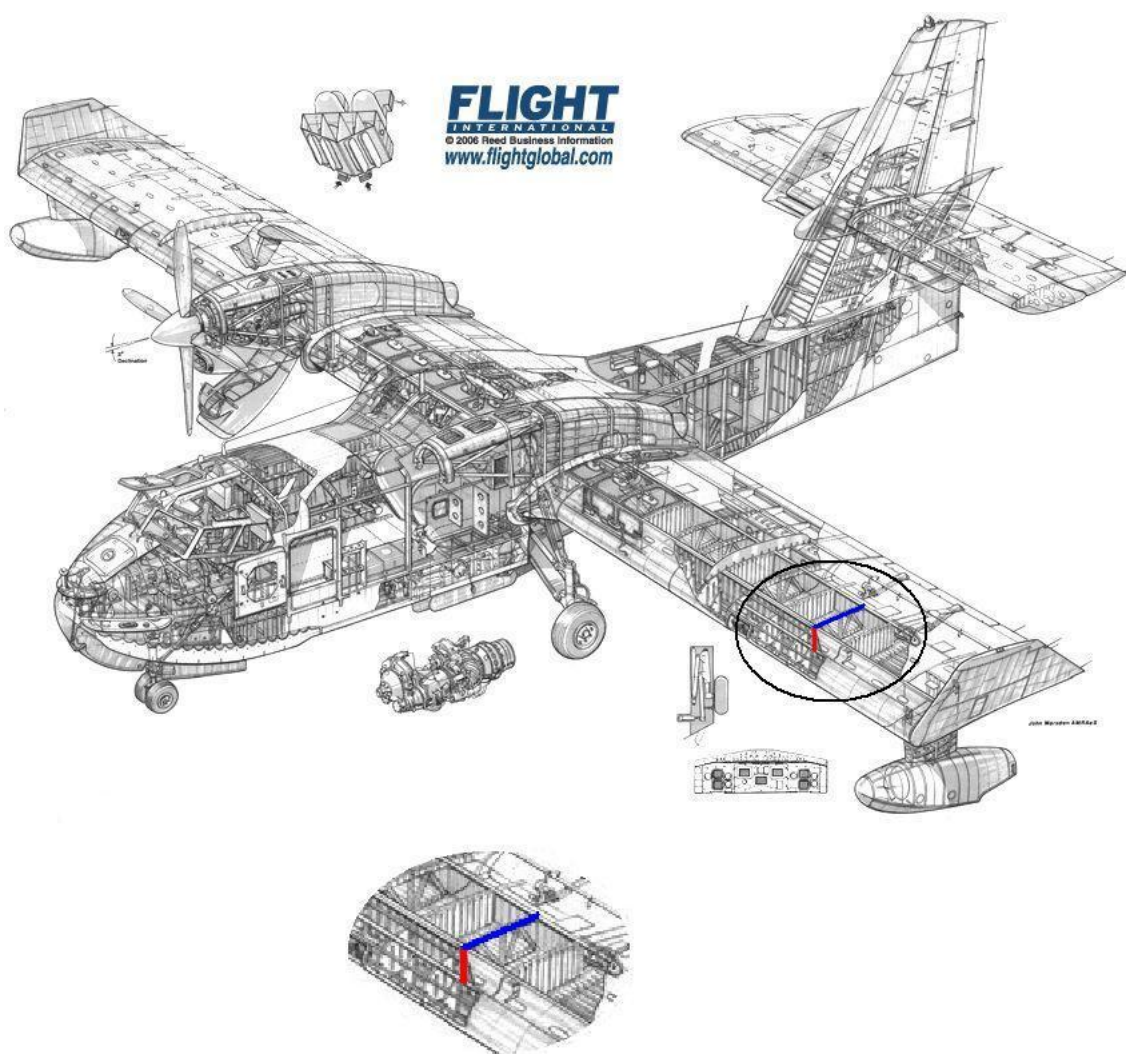


Figura 5.2: Cutaway del Canadair CL.415

Antes de calcular las tensiones normales y tangenciales es necesario conocer a priori parámetros como el centro de gravedad del perfil, el valor de los momentos de inercia y el producto de inercia.

Para calcularlos se divide el perfil en estructuras conocidas, en este caso concreto, en rectángulos, figura 5.3.

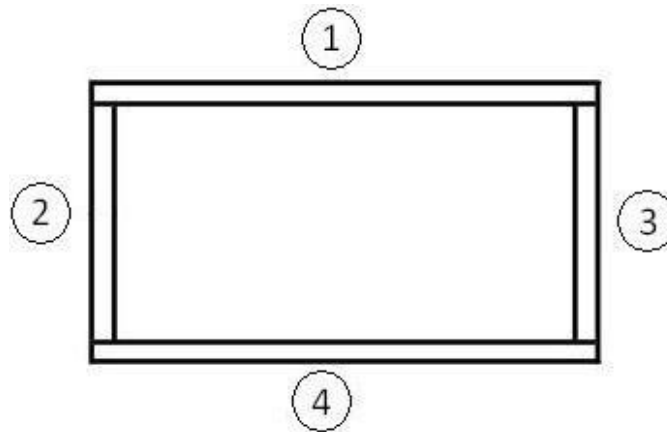


Figura 5.3: Perfil del cajón de torsión dividido en rectángulos.

5.2. Parámetros geométricos

5.2.1. Centro de gravedad

Para realizar los cálculos se toma como centro de gravedad el punto de unión de los rectángulos 2 y 4.

$$X_G = \frac{\sum A_i \cdot X_i}{\sum A_i} \quad (5.1) \qquad Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_i}{\sum A_i} \quad (5.2)$$

$$X_G = \frac{2 \cdot (d \cdot e) \cdot \frac{d}{2} + [(h - 2e) \cdot e] \cdot \frac{e}{2} + [(h - 2e) \cdot e] \cdot \left(d - \frac{e}{2}\right)}{2 \cdot (d \cdot e) + 2 \cdot [(h - 2e) \cdot e]}$$

Al tratarse de espesor delgado, este valor es tan pequeño en comparación con las otras medidas que se desprecia en cualquier expresión del tipo (a+e) o cuando se encuentra elevado a algún número mayor que uno.

$$X_G = \frac{2 \cdot (d \cdot e) \cdot \frac{d}{2} + [h \cdot e] \cdot \frac{e}{2} + [h \cdot e] \cdot d}{2 \cdot (d \cdot e) + 2 \cdot [h \cdot e]} = \frac{d^2 \cdot e + \frac{h \cdot e^2}{2} + h \cdot e \cdot d}{2 \cdot e \cdot (d + h)}$$

$$X_G = \frac{d^2 \cdot e + h \cdot e \cdot d}{2 \cdot e \cdot (d + h)} = \frac{d \cdot e \cdot (d + h)}{2 \cdot e \cdot (d + h)} = \frac{d}{2}$$

$$Y_G = \frac{(d \cdot e) \cdot \left(h - \frac{e}{2}\right) + 2 \cdot [(h - 2e) \cdot e] \cdot \frac{h}{2} + (d \cdot e) \cdot \frac{e}{2}}{2 \cdot (d \cdot e) + 2 \cdot [(h - 2e) \cdot e]}$$

$$Y_G = \frac{(d \cdot e) \cdot h + 2 \cdot [h \cdot e] \cdot \frac{h}{2} + (d \cdot e) \cdot \frac{e}{2}}{2 \cdot (d \cdot e) + 2 \cdot (h \cdot e)} = \frac{d \cdot e \cdot h + h^2 \cdot e + \frac{d \cdot e^2}{2}}{2 \cdot e \cdot (d + h)}$$

$$Y_G = \frac{d \cdot e \cdot h + h^2 \cdot e}{2 \cdot e \cdot (d + h)} = \frac{d \cdot h + h^2}{2 \cdot (d + h)} = \frac{h \cdot (d + h)}{2 \cdot (d + h)} = \frac{h}{2}$$

Como era de esperar los centros de gravedad no dependen del espesor del perfil.

Sustituyendo numéricamente en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$X_G = 0,57m$$

$$Y_G = 0,28m$$

5.2.2. Momento de inercia

El momento de inercia es una magnitud escalar que refleja la distribución de masas de un cuerpo o un sistema de partículas en rotación respecto al eje de giro.

Únicamente depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro, nunca de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

Conocido el momento de inercia de un rectángulo macizo como el de la figura 5.4, análogamente se calcula el de la figura 5.3.

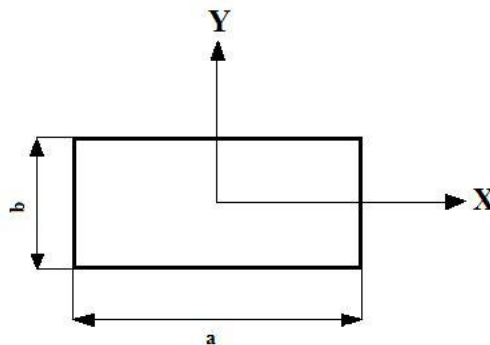


Figura 5.4: Rectángulo macizo de longitudes a y b.

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \cdot a \cdot dy = a \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-b/2}^{b/2} = 2 \cdot a \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{b/2} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot b^3$$

El momento de inercia del perfil requerido será igual al sumatorio del momento de inercia de cada rectángulo macizo de los cuales está formado. Al no coincidir el centro de gravedad de cada rectángulo con el centro de gravedad de la estructura es necesario aplicar el Teorema de Steiner.

El Teorema de Steiner para ejes paralelos separados una distancia "l" consiste en:

$$I = I_G + l^2 \cdot A \quad (5.3)$$

Donde "I_G" es el momento de inercia respecto del centro de gravedad de la estructura.

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} \quad (5.4)$$

$$I_{x1} = \frac{1}{12} \cdot d \cdot e^3 + (d \cdot e) \cdot \left[\left(h - \frac{e}{2} \right) - \frac{h}{2} \right]^2 = d \cdot e \cdot \frac{h^2}{4}$$

$$I_{x2} = \frac{1}{12} \cdot e \cdot (h - 2 \cdot e)^3 + [e \cdot (h - 2 \cdot e)] \cdot \left[\frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right]^2 = \frac{1}{12} \cdot e \cdot h^3$$

$$I_{x3} = \frac{1}{12} \cdot e \cdot (h - 2 \cdot e)^3 + [e \cdot (h - 2 \cdot e)] \cdot \left[\frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right]^2 = \frac{1}{12} \cdot e \cdot h^3$$

$$I_{x4} = \frac{1}{12} \cdot d \cdot e^3 + [d \cdot e] \cdot \left[\frac{e}{2} - \frac{h}{2} \right]^2 = d \cdot e \cdot \frac{h^2}{4}$$

A continuación, según la ecuación (5.4) se suman los términos anteriores:

$$I_x = 2 \cdot d \cdot e \cdot \frac{h^2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot e \cdot h^3 = d \cdot e \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot e \cdot h^3 = e \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \left(d + \frac{1}{3} \cdot h \right)$$

Numéricamente:

$$I_x = (0,21 \cdot e) m^4$$

10.2.3. Producto de Inercia

El producto de inercia se calcula de la siguiente manera:

$$P_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot \partial A \quad (5.5)$$

Al ser tanto el eje X como el eje Y ejes de simetría el producto de inercia es cero.

5.3. Cálculo de la tensión normal

Para el cálculo de la tensión normal se hace uso de la ecuación (4.21)

Para una visualización más rápida de las simplificaciones que se la realizarán se reagrupan los términos como en la ecuación (4.24):

$$\sigma_z = \frac{N_z(z)}{A} + M_x(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot I_y - x(s) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right] + M_y(z) \cdot \left[\frac{y(s) \cdot P_{xy} - x(s) \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} \right]$$

Las simplificaciones realizadas en la ecuación anterior son las siguientes:

- En primer lugar al no existir esfuerzos en la dirección longitudinal del ala el esfuerzo axial es nulo, por lo que se elimina el primer término de la ecuación.
- En segundo lugar se elimina el tercer término de la ecuación, debido a que al no producirse momentos flectores en el eje Y, $M_y = 0$.
- Por último, como se explica en el punto 5.2.3, el producto de inercia se iguala a cero por lo que se desechan el término que resta tanto en el numerador como en el denominador de la ecuación restante.

Finalmente la ecuación (4.24) queda reducida a la siguiente expresión:

$$\sigma_z = M_x(z) \cdot \frac{y(s) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y} = \frac{M_x(z) \cdot y(s)}{I_x} \quad (5.6)$$

Donde se observa que σ_z depende linealmente de X e Y.

“y” es la distancia a la fibra neutra, en este caso: $y = \frac{h}{2}$

Si se recuerda el punto 3.2.3, el momento máximo se producía en el empotramiento y en maniobra simétrica con un valor de:

$$M_x = 1352,52 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot \frac{h}{2}}{e \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \left(d + \frac{1}{3} \cdot h\right)} = \frac{M_x}{e \cdot h \cdot \left(d + \frac{1}{3} \cdot h\right)} = \frac{1803360 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

5.4. Cálculo de la tensión tangencial

Para el cálculo de las tensiones tangenciales que actúan en una sección cerrada de pared delgada es necesario definir el origen de la coordenada curvilínea s y suponer que el perfil está abierto en dicho origen. Como se observa en la figura 5.5 el origen de la coordenada curvilínea se establece en el punto 1.

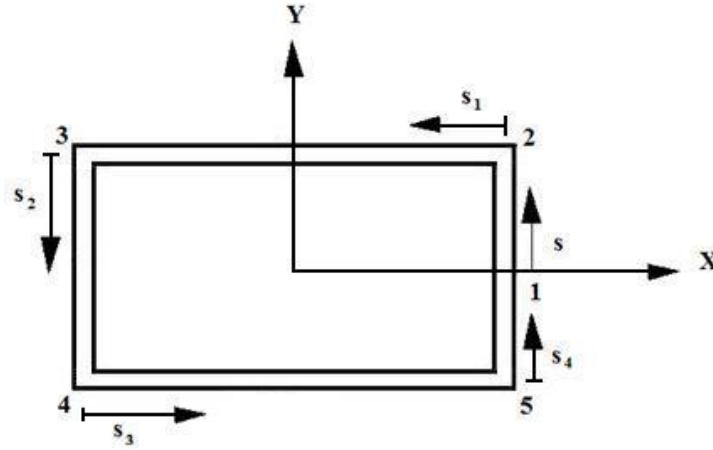


Figura 5.5: Origen de la coordenada curvilínea s .

En segundo lugar, aplicando la ecuación (4.31) se obtiene $q_{vA}(z, s)$.

$$q_{vA}(z, s) = -K_x(Q_x, Q_y) \cdot m_x^*(s) - K_y(Q_x, Q_y) \cdot m_y^*(s)$$

$$K_x = \frac{Q_y(z) \cdot I_y - Q_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2}$$

$$K_y = \frac{Q_x(z) \cdot I_x - Q_y(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2}$$

La ecuación (4.31) también se puede simplificar.

- En primer lugar dado que no existe esfuerzo cortante en el eje x, $Q_x(z) = 0$.
- En segundo lugar, $P_{xy} = 0$

De esta forma las expresiones de K_x y K_y quedan de la siguiente manera:

$$K_x = \frac{Q_y(z) \cdot I_y - Q_x(z) \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} = \frac{Q_y(z) \cdot I_y}{I_x \cdot I_y} = \frac{Q_y(z)}{I_x}$$

$$K_y = 0$$

Por lo que:

$$q_{vA}(z, s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot m_x^*(s) \quad (5.7)$$

A continuación se aplicará esta ecuación a cada uno de los cinco tramos presentes en el perfil anterior.

Tramo 1-2

$$m_x^*(s) = \int_0^s y(s) \cdot e \cdot \partial s = \int_0^s s \cdot e \cdot \partial s = \frac{e \cdot s^2}{2}$$

$$q_{vA}(s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \frac{e \cdot s^2}{2}$$

Tramo 2-3

$$m_x^*(s_1) = \frac{e \cdot s^2}{2} \Big|_0^{h/2} + \int_0^{s_1} \frac{h}{2} \cdot e \cdot \partial s_1 = \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_1$$

$$q_{vA}(s_1) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(\frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_1 \right)$$

Tramo 3-4

$$m_x^*(s_2) = \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_1 \Big|_0^d + \int_0^{s_2} \left(\frac{h}{2} - s_2 \right) \cdot e \cdot \partial s_2 =$$

$$= \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d + \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2}$$

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(\frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d + \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

Tramo 4-5

$$m_x^*(s_3) = \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d + \left(\frac{h}{2} \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right) \Big|_0^h + \int_0^{s_3} \left(-\frac{h}{2} \right) \cdot e \cdot \partial s_3 =$$

$$= \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d + \frac{h^2}{2} \cdot e - e \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_3 =$$

$$= \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_3$$

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(\frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_3 \right)$$

Tramo 5-1

$$m_x^*(s_4) = \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d - \left(\frac{h}{2} \cdot e \cdot s_3 \right) \Big|_0^d + \int_0^{s_4} \left(s_4 - \frac{h}{2} \right) \cdot e \cdot \partial s_4 =$$

$$= \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{h}{2} \cdot e \cdot d - \frac{h}{2} \cdot e \cdot d + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_4 =$$

$$= \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_4$$

$$q_{vA}(s_4) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(\frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - \frac{h}{2} \cdot e \cdot s_4 \right)$$

Numéricamente se obtiene:

Tramo 1-2

$$q_{vA}(s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \frac{e \cdot s^2}{2}$$

Tramo 2-3

$$q_{vA}(s_1) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,039 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_1)$$

Tramo 3-4

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,039 \cdot e + 0,32 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,36 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

Tramo 4-5

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,039 \cdot e + 0,32 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,36 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_3)$$

Tramo 5-1

$$q_{vA}(s_4) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,039 \cdot e + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

A continuación se halla $q_v(0)$ mediante la ecuación (4.32).

$$q_v(0) = \frac{-\int_0^S \frac{q_{vA}(z, s)}{e(s)} \cdot \partial s}{\int_0^S \frac{1}{e(s)} \cdot \partial s} = -\frac{1}{S} \cdot \int_0^S q_{vA}(s) \cdot \partial s$$

Siendo S el perímetro de la línea media del perfil.

$$S = 2 \cdot (d + h) = 3,4m$$

$$\begin{aligned} q_v(0) = & \frac{Q_y \cdot (z)}{S \cdot I_x} \cdot \left(\int_0^{h/2} \frac{e}{2} \cdot s^2 \cdot \partial s + \int_0^d (0,039 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_1) \cdot \partial s_1 + \right. \\ & + \int_0^h \left(0,36 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_2 - \frac{e}{2} \cdot s_2^2 \right) \cdot \partial s_2 + \int_0^d (0,36 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_3) \cdot \partial s_3 + \\ & \left. + \int_0^{h/2} \left(0,039 \cdot e + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_4 \right) \cdot \partial s_4 \right) \end{aligned}$$

$$q_v(0) = 0,2 \cdot e \cdot \frac{Q_y(z)}{I_x}$$

Finalmente, se puede determinar el flujo de tensiones a partir de la ecuación (4.30)

$$q_v(z, s) = q_v(z, 0) + q_{vA}(z, s)$$

$$q_v(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,2 \cdot e - \frac{s^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s \leq 0,28)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,2 \cdot e - 0,039 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_1) \quad (0 \leq s_1 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,16 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_1)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,2 \cdot e - 0,36 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s_2 \leq 0,56)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(-0,16 \cdot e - 0,28 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,2 \cdot e - 0,36 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_3) \quad (0 \leq s_3 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (-0,16 \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,2 \cdot e - 0,039 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_4 \right) \quad (0 \leq s_4 \leq 0,28)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,16 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,28 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

La distribución del flujo q_v se representa en la figura 5.6:

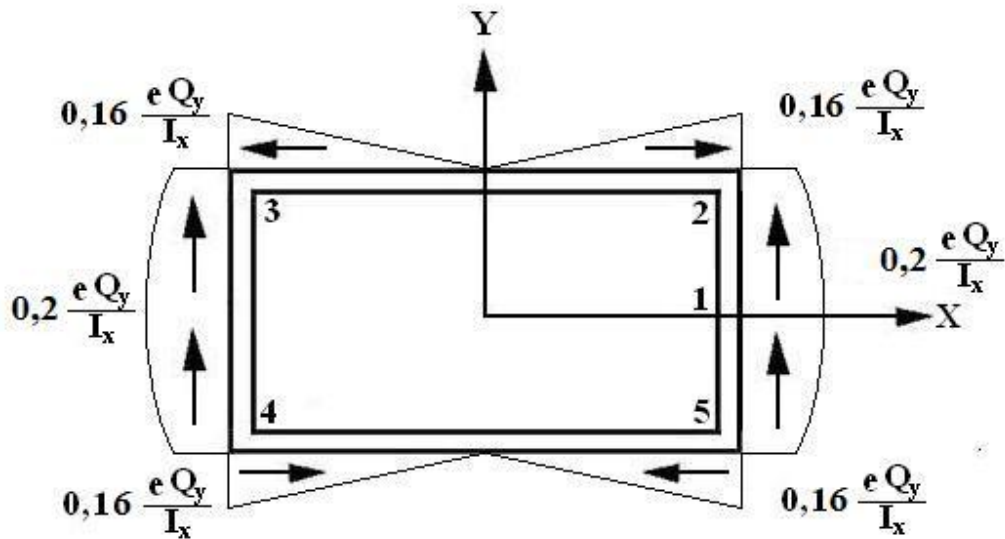


Figura 5.6: Distribución del flujo cortante.

Las tensiones tangenciales se obtienen dividiendo el flujo por el espesor.

Como puede apreciarse, la máxima tensión tangencial se produce en los puntos del perfil contenidos en el eje X, cuyo valor es:

$$(\tau_{zs})_{MAX} = -\tau_{zs}(0) = \tau_{zs_2}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{0,2 \cdot e \cdot Q_y}{e \cdot I_x} = 0,2 \cdot \frac{Q_y}{I_x} \quad (5.8)$$

El máximo esfuerzo cortante se produce en el empotramiento, cuyo valor es:

$$Q_y = 219,09 KN$$

Sustituyendo:

$$\tau_z = \frac{208657,14 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

5.5. Diseño del cajón de torsión

El material previsto para la fabricación del cajón de torsión es Aluminio 7075. Se trata de una de las aleaciones con mejores propiedades mecánicas dentro de los aluminios.

El Aluminio 7075 tiene multitud de utilidades, se emplea tanto en armamento como en aeronáutica y en la industria automóvil. También se aplica en la construcción de maquinaria, de moldes para inyección de plásticos, moldes de soplado, moldes de embutición profunda al vacío, moldes para extrusión de plásticos, soportes para todo tipo de moldes y tornillería. A continuación se resumen las principales propiedades mecánicas de este material obtenidos de ASM Internacional (Marzo 1996).

Descripción	Valor
Densidad	2800 kg/m ³
Carga de rotura	441-519,4 MPa
Límite elástico	410,5 MPa
Límite elástico de cortadura	152 MPa
Alargamiento	10%
Resistencia a la cizalladura	333,2 MPa
Módulo de elasticidad	72 GPa

Tabla 5.1: Características del aluminio 7075.

Para que el ala del avión pueda soportar con éxito el estado tensional al que está sometida es necesario que el espesor de la caja de torsión permita que se cumplan las siguientes condiciones de diseño:

$$\sigma_z \leq \frac{\sigma_e}{\delta_s} \quad (5.9) \quad \tau_z \leq \frac{\tau_e}{\delta_s} \quad (5.10)$$

Donde δ_s es el coeficiente de seguridad el cual adquiere un valor de 1,5. Con ello se asegura trabajar del lado de la seguridad ante posibles defectos de fabricación o sobrecargas puntuales no previstas.

En primer lugar se estima el espesor necesario para que soporte las tensiones normales debida a los esfuerzos flectores a los que está sometido. De la tabla 5.1 se obtienen los valores de límite elástico.

$$\sigma_e = 410,5 \text{ MPa}$$

La tensión a la que estará sometido es la calculada en el apartado 5.3.

$$\sigma_z = \frac{1803373,33 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

Despejando de la ecuación (5.9):

$$\frac{1803373,33 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{410,5}{1,5}$$

$$e \geq 0,0066m$$

Una vez calculado el perfil para el momento flector se determina el perfil necesario para soportar los cortantes. De nuevo el valor de límite elástico de cortadura se obtiene de la tabla 5.1 y la tensión aplicada es la calculada en el punto 5.4.

$$\tau_e = 152 MPa$$

$$\tau_z = \frac{208657,14 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

Despejando de la ecuación (5.10):

$$\frac{208657,14 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{152}{1,5}$$

$$e \geq 0,0021m$$

Como se deben cumplir ambas premisas, se elige el espesor mayor ya que es el más restrictivo y de esta forma soportará tanto los esfuerzos normales como los tangenciales.

En conclusión:

$$e \geq 0,0066m$$

Como era de esperar el esfuerzo flector proporciona unas condiciones de diseño más restrictivas que el esfuerzo cortante.



6. Estudio paramétrico

En este punto se estudiará la influencia de parámetros relevantes en el diseño del cajón de torsión. Se observará entre otras cosas el grado de influencia de las dimensiones geométricas características y la variación que producirán en el diseño al ser modificadas. De este modo se obtendrá la combinación necesaria para que se produzca una disminución en el espesor del cajón, lo que produciría la optimización tanto del proceso de producción como del coste final del producto así como las características dinámicas del avión en vuelo.

Los parámetros que se consideran relevantes en el proceso son: la envergadura, la cuerda, las posiciones de los motores y de los flotadores y el espesor del ala.

Parámetros	Medida original (m)	Modificación 1 (m)	Modificación 2 (m)	Modificación 3 (m)
Envergadura	28,63	24	33	38
Cuerda	3,54	2	4,5	6
Posición del motor	2,42	1,5	3,5	5
Posición del flotador	11,90	8	9,5	13,5
Espesor	0,56	0,40	0,80	1

Tabla 6.1: Rango de valores a estudiar.

6.1. Envergadura

A continuación se analiza la influencia de las variaciones que sufre el proceso de diseño al variar el valor de la semienvergadura (como se explicaba en el punto 2.2.5, al ser la estructura tanto simétrica de forma como de cargas se trabajará con la mitad de la misma; y por lo tanto, en vez de la envergadura se utilizará la semienvergadura).

Siguiendo de manera ordenada el punto 2.2 (análisis de cargas sobre el ala) se observa que en el primer punto 2.2.1 no interviene la semienvergadura; es decir, el peso del motor se mantiene invariante al cambio de valor del parámetro en estudio.

De igual forma le ocurre a la carga descrita en el punto 2.2.2, la carga del flotador, la cual sólo es función de las dimensiones y propiedades del mismo y evidentemente, de su ubicación en el ala.

En el punto 2.2.3 se explica de manera detallada el peso del ala, si se sigue minuciosamente el proceso se observa que en dos de los parámetros aparece la letra b (con la que se designa a la envergadura).

Según la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 0,0051 \cdot (W_{dg} \cdot N_z)^{0,557} \cdot S_w^{0,649} \cdot A^{0,5} \cdot (t/c)_{root}^{-0,4} \cdot (1 + \lambda)^{0,1} \cdot (\cos \beta)^{-1,0} \cdot S_{csw}^{0,1}$$

Donde los parámetros que experimentan cambios son los siguientes:

- El área del ala: $S_w = c \cdot b$
- La relación o razón de aspecto: $A = b/c$

Por último, al considerarse una carga distribuida constante a lo largo del ala, es decir de la semienvergadura, variará dependiendo de la longitud de la misma.

$$W_{wing} = R(x) = \frac{W_{wing}}{b/2}$$

Observando la ecuación (2.3) se aprecia como ésta depende de la longitud del ala, y por lo tanto, al variar la semienvergadura, se modificará el valor de la fuerza de sustentación.

6.1.1. Cálculos con una envergadura igual a veinticuatro metros.

En este primer apartado se observará el cambio que experimenta el espesor al disminuir la envergadura, la cual desciende de 28,63 a 24 metros. El resto de parámetros involucrados en la ecuación se mantienen invariantes.

Se recuerda que los valores introducidos en la ecuación (2.2) están en unidades inglesas, se facilitarán entre paréntesis el equivalente en unidades del sistema internacional.

- El área del ala (S_w): $S_w = 914,49 \text{ ft}^2$ ($S_w = 84,96 \text{ m}^2$)
- La relación o razón de aspecto (A): $A = 6,78$ []

Se recalcula el peso del ala según la ecuación (2.2) obteniendo un valor de:

$$M_{wing} = 2111,3 \text{ lb} \text{ (957,68 Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 9385,27 \text{ N}$$

Como se considera una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala:

$$W_{wing} = R(x) = 782,10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Siendo un primer ejemplo se obtendrá la fuerza de sustentación para los dos tipos de vuelo estudiados, nivelado y en maniobra simétrica. En primer lugar se realiza para vuelo nivelado, en el cual según la ecuación (2.4) el peso se iguala a la fuerza de sustentación para mantener el equilibrio en vuelo.

$$\int_0^{(b/2)} k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx = \frac{W_{row}}{2}$$

De esta forma, el coeficiente de sustentación tendrá el valor:

$$k = \frac{\frac{W_{dg}}{2}}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{\frac{194922}{2}}{\int_0^{(24/2)} \sqrt{(24/2)^2 - x^2} \cdot dx} = 861,74$$

Por tanto, la fuerza de sustentación que permite al avión mantener un vuelo nivelado; es decir, sin ascender o descender, es la siguiente:

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 861,74 \cdot \sqrt{12^2 - x^2}$$

En resumen el conjunto de fuerzas que soporta el ala es el siguiente:

Peso del motor $\rightarrow W_T = 11620,15N$

Peso del flotador $\rightarrow W_F = 1519N$

Peso del ala $\rightarrow W_{wing} = R(x) = 782,10 \frac{N}{m}$

Fuerza de sustentación $\rightarrow l(x) = 861,74 \cdot \sqrt{12^2 - x^2}$

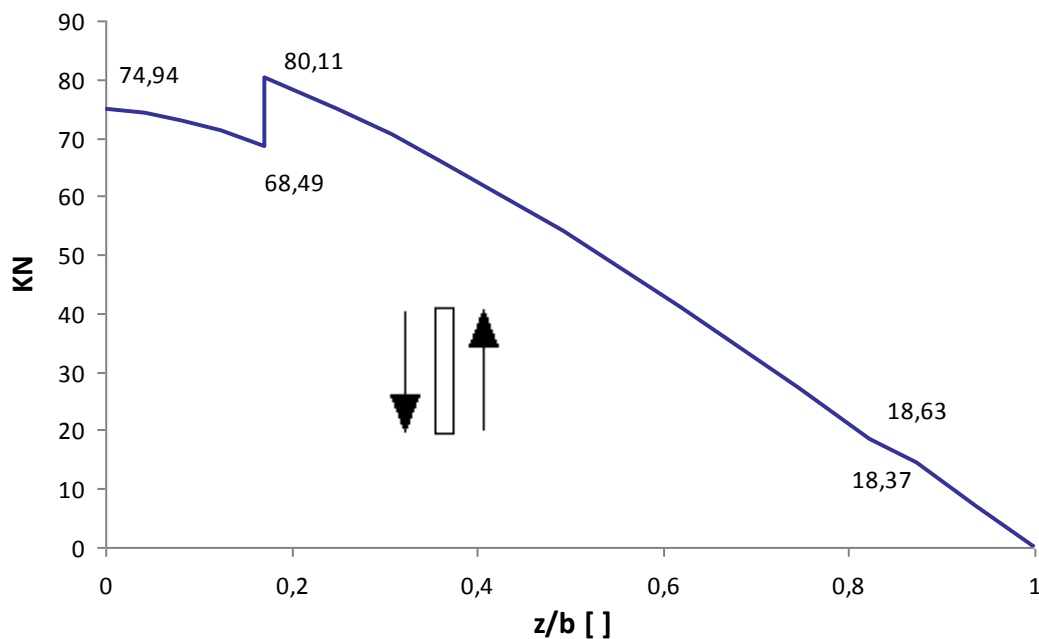


Figura 6.1: Diagrama de esfuerzos cortantes en vuelo nivelado para una envergadura de 24m

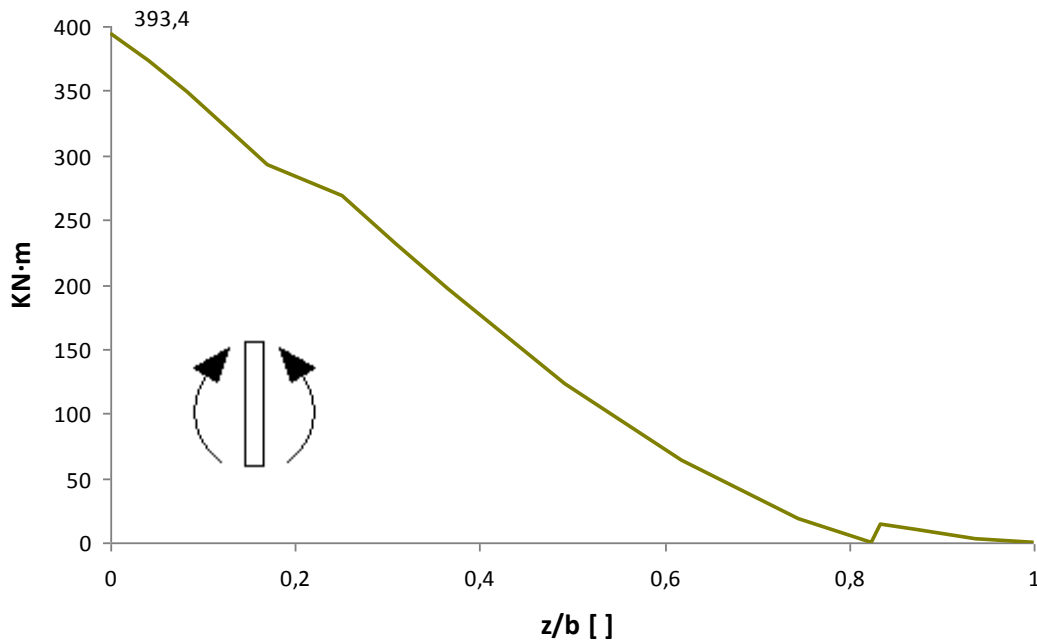


Figura 6.2: Diagrama de esfuerzos flectores en vuelo nivelado para una envergadura de 24m

Obtenidos los diagramas de esfuerzos para vuelo nivelado se continúa calculando para maniobra simétrica, la cual producirá esfuerzos mayores y por lo tanto, debería ser la crítica, en la cual se deba basar el estudio.

En esta situación, según la ecuación (2.5):

$$\int_0^{(b/2)} k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot \partial x = \left(\frac{W_{\text{row}}}{2} \right) \cdot 2,5$$

De esta forma, el coeficiente de sustentación tendrá el valor:

$$k = \frac{\left(\frac{W_{dg}}{2} \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot \partial x} = \frac{\left(\frac{194922}{2} \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(24/2)} \sqrt{(24/2)^2 - x^2} \cdot \partial x} = 2154,37$$

Por tanto, la fuerza de sustentación es la siguiente:

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 2154,37 \cdot \sqrt{12^2 - x^2}$$

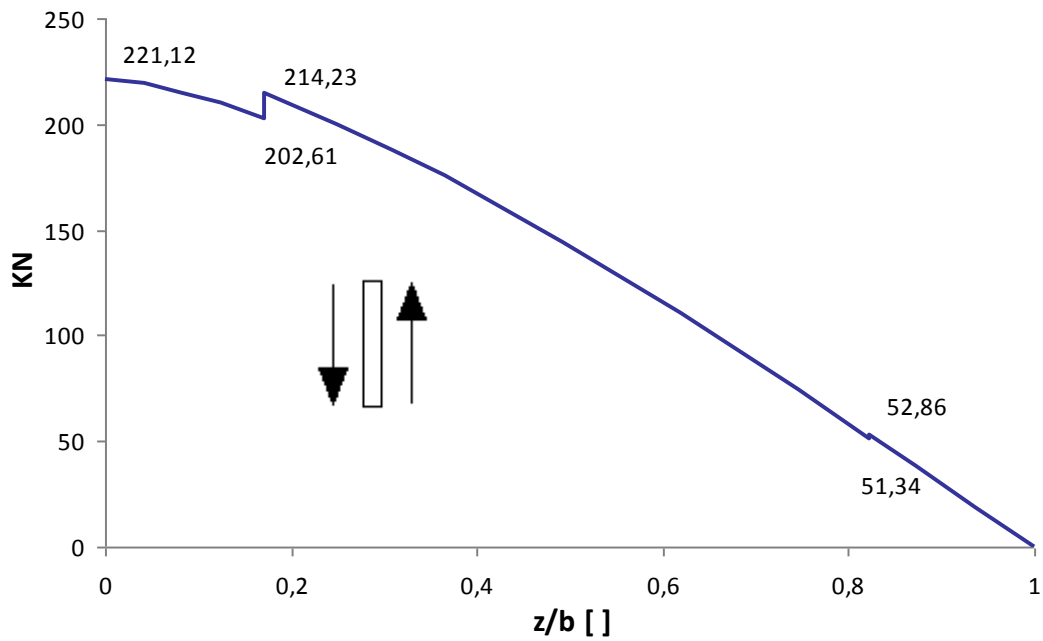


Figura 6.3: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 24m

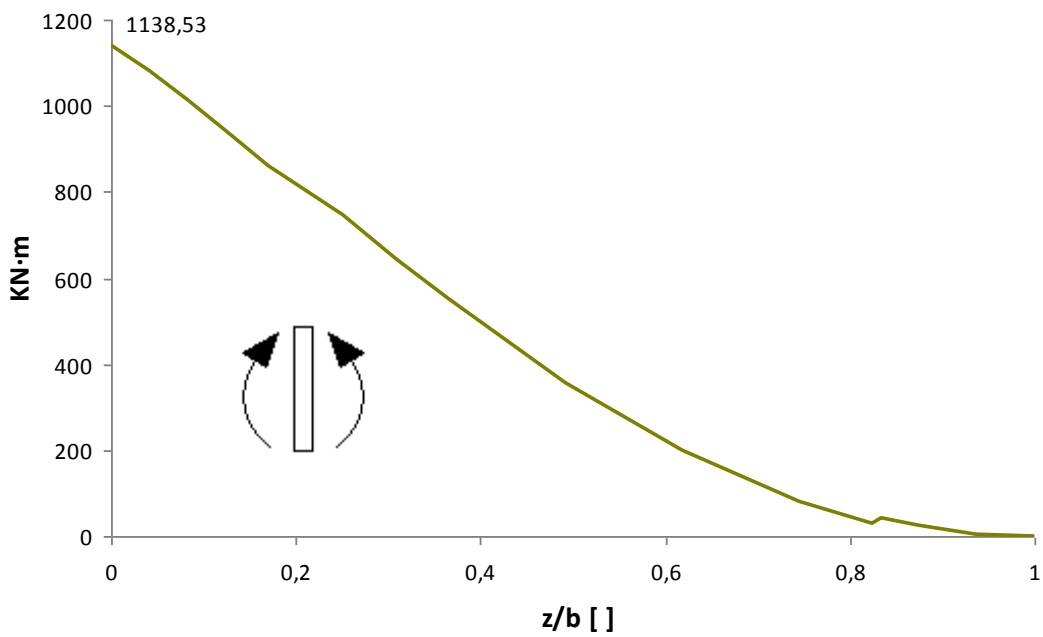


Figura 6.4: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una envergadura de 24m

Como era de esperar los valores críticos se obtienen en maniobra simétrica y ambos en el empotramiento.

$$Q_y = 221,12 \text{ KN}$$

$$M_x = 1138,53 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.8) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1518040 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{210590,48 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales se halla con la ayuda de la ecuación (5.9):

$$\frac{1518040 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{410,5}{1,5}$$

$$e \geq 0,0055 \text{ m}$$

Y para soportar los esfuerzos cortantes con la ecuación (5.10):

$$\frac{210590,48 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{152}{1,5}$$

$$e \geq 0,0021 \text{ m}$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es el calculado para el flector.

$$e \geq 0,0055 \text{ m}$$

Para los otros valores de envergadura y demás parámetros sólo se calcularán los esfuerzos en maniobra simétrica, ya que se sabe de antemano que son los valores críticos con los que se debe diseñar el cajón.

6.1.2. Cálculos con una envergadura igual a treinta y tres metros.

En este segundo punto se observará el cambio que experimenta el espesor aumentando la envergadura, la cual crece desde un valor inicial de 28,63 a 33 metros.

Se comenzará recalculando los parámetros en los que ha sufrido variación para volver a estimar el peso del ala y se continuará con la fuerza de sustentación en maniobra simétrica.

- El área del ala : $S_w = 1257,45 \text{ ft}^2$ (116,82 m²)
- La relación o razón de aspecto: $A = 9,32$ []

Según la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 3043,75 \text{ lb} \text{ (1380,62 Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 13530,08 \text{ N}$$

Al considerarse una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala:

$$W_{wing} = R(x) = 820 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Con la ecuación (2.3) se calcula la fuerza de sustentación, para ellos se necesita conocer el coeficiente de sustentación, el cual se obtiene aplicando la ecuación (2.5) Despejando:

$$\int_0^{(b/2)} k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx = \left(\frac{W_{tow}}{2} \right) \cdot 2,5$$

$$k = \frac{\left(\frac{W_{dg}}{2} \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{\left(\frac{194922}{2} \right) \cdot 2,5}{\int_0^{(33/2)} \sqrt{(33/2)^2 - x^2} \cdot dx} = 1139,5$$

Por tanto, la fuerza de sustentación es la siguiente:

$$S(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 1139,5 \cdot \sqrt{16,5^2 - x^2}$$

En resumen el conjunto de fuerzas que soporta el ala se expone a continuación:

Peso del motor $\rightarrow W_T = 11620,15N$

Peso del flotador $\rightarrow W_F = 1519N$

Peso del ala $\rightarrow W_{wing} = R(x) = 820 \frac{N}{m}$

Fuerza de sustentación $\rightarrow l(x) = 1139,5 \cdot \sqrt{16,5^2 - x^2}$

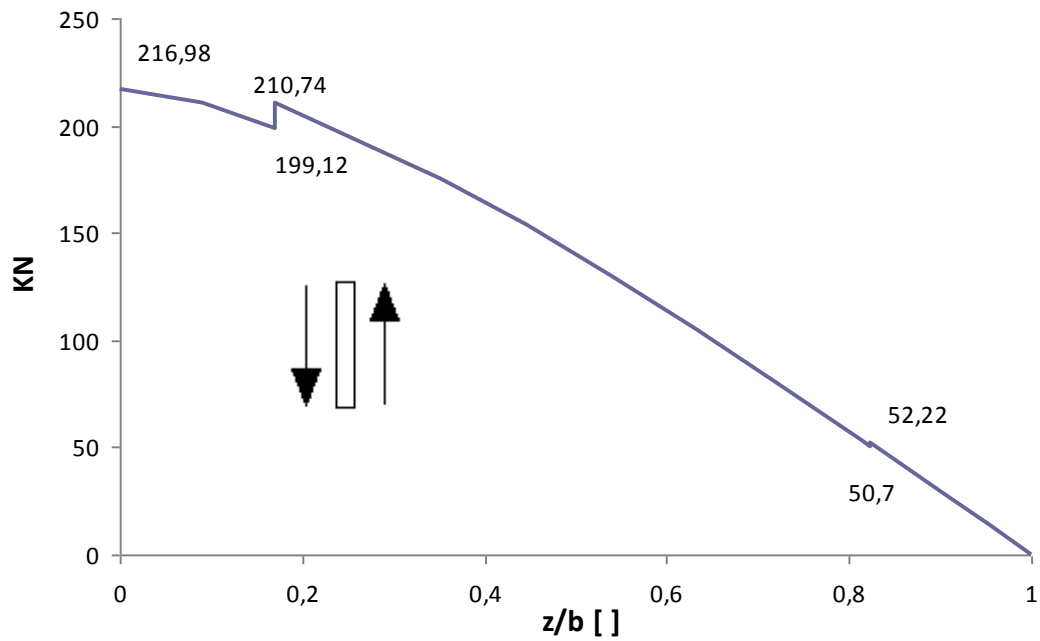


Figura 6.5: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 33m

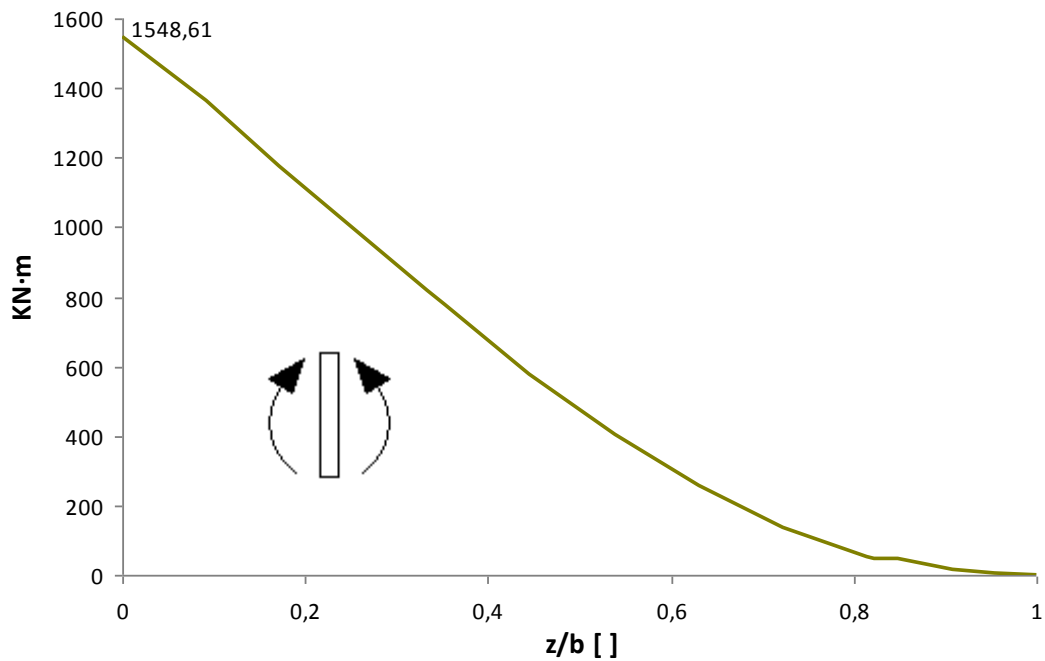


Figura 6.6: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una envergadura de 33m

Tanto el cortante como el momento crítico se producen en el empotramiento con un valor de:

$$Q_y = 216,98 \text{ KN}$$

$$M_x = 1548,61 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.8) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{2064813,33 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{206647,62 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales se halla despejando de la ecuación (5.9):

$$\frac{2064813,33 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{410,5}{1,5}$$

$$e \geq 0,0075 \text{ m}$$

Para soportar los esfuerzos cortantes de la (5.10):

$$\frac{206647,62 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{152}{1,5}$$

$$e \geq 0,0020 \text{ m}$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es:

$$e \geq 0,0075 \text{ m}$$



6.1.3. Cálculos con una envergadura igual a treinta y ocho metros.

En este segundo punto de nuevo se aumentará más la envergadura y se observará la variación de espesor sufrido por el cajón de torsión.

Se seguirán los mismos pasos que en los puntos 6.1.1 y 6.1.2.

- El área del ala: $S_w = 1448,01 ft^2$ (134,52 m²)
- La relación o razón de aspecto: $A = 10,73[]$

Según la ecuación (4.2):

$$M_{wing} = 3579,76 lb \text{ (1623,75Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 15912,75 N$$

$$W_{wing} = R(x) = 837,51 \frac{N}{m}$$

La fuerza de sustentación se calcula de la misma manera que en ambos casos anteriores (6.1.1 y 6.1.2):

$$k = \frac{\left(\frac{W_{dg}}{2}\right) \cdot 2,5}{\int_0^{(b/2)} \sqrt{(b/2)^2 - x^2} \cdot dx} = \frac{\left(\frac{194922}{2}\right) \cdot 2,5}{\int_0^{(38/2)} \sqrt{(38/2)^2 - x^2} \cdot dx} = 859,36$$

$$l(x) = k \cdot \sqrt{(b/2)^2 - x^2} = 859,36 \cdot \sqrt{19^2 - x^2}$$

En resumen el conjunto de fuerzas que soporta el ala es el siguiente:

Peso del motor $\rightarrow W_T = 11620,15N$

Peso del flotador $\rightarrow W_F = 1519N$

Peso del ala $\rightarrow W_{wing} = R(x) = 837,51 \frac{N}{m}$

Fuerza de sustentación $\rightarrow l(x) = 859,36 \cdot \sqrt{19^2 - x^2}$

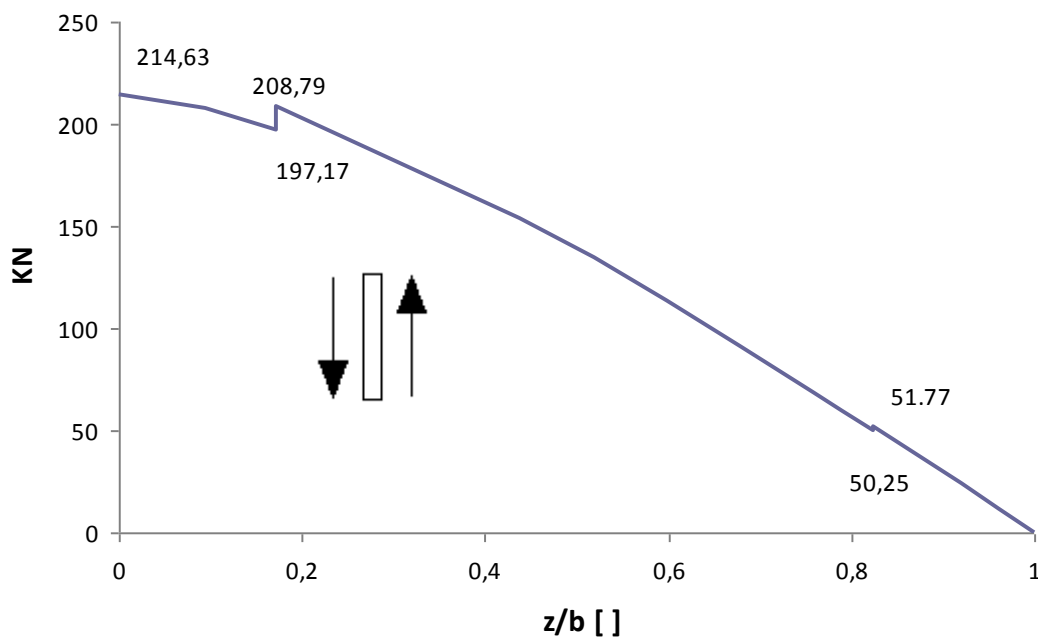


Figura 6.7: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una envergadura de 38m

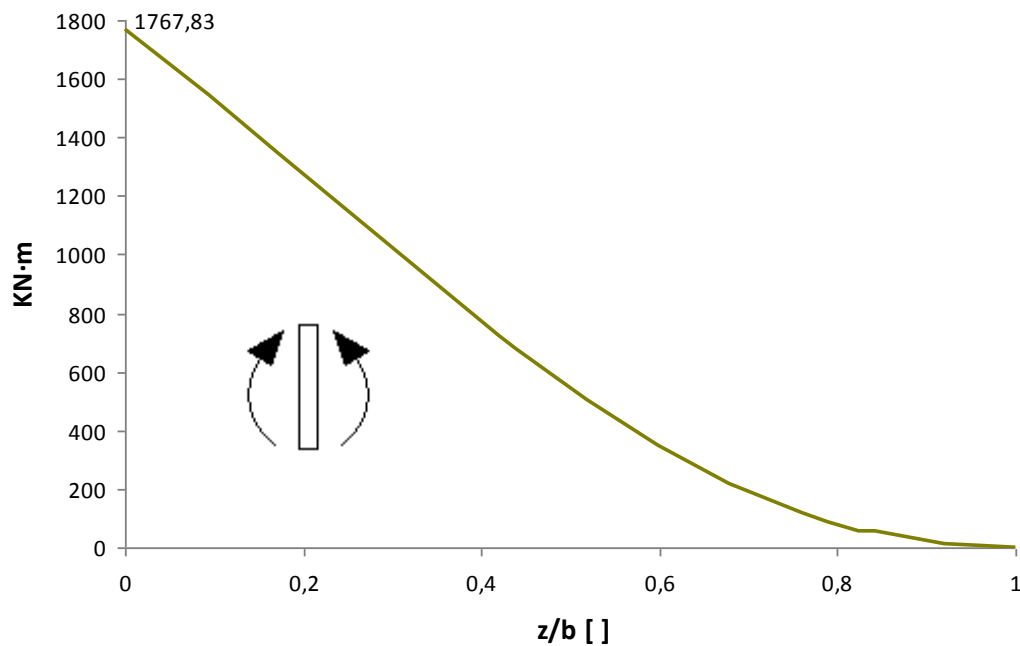


Figura 6.8: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una envergadura de 38m

Los valores de cortante y momento crítico se producen en el empotramiento con un valor de:

$$Q_y = 214,63 \text{ KN}$$

$$M_x = 1767,83 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la ecuación (5.6) y (5.8):

$$\sigma_z = \frac{2357106,67 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{204409,52 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales se halla de ecuación (5.9) y para soportar los esfuerzos cortantes de la ecuación (5.10):



$$\frac{2357106,67 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{410,5}{1,5}$$

$$e \geq 0,0086m$$

$$\frac{204409,52 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{152}{1,5}$$

$$e \geq 0,0020m$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es:

$$e \geq 0,0086m$$

6.1.4. Discusión de los resultados

6.1.4.1. Envergadura frente al espesor del cajón de torsión

Para poder visualizar la variación que experimenta el espesor del cajón de torsión necesario para soportar los esfuerzos normales y tangenciales al aumentar o disminuir la envergadura se realiza el siguiente gráfico, figura 6.9:

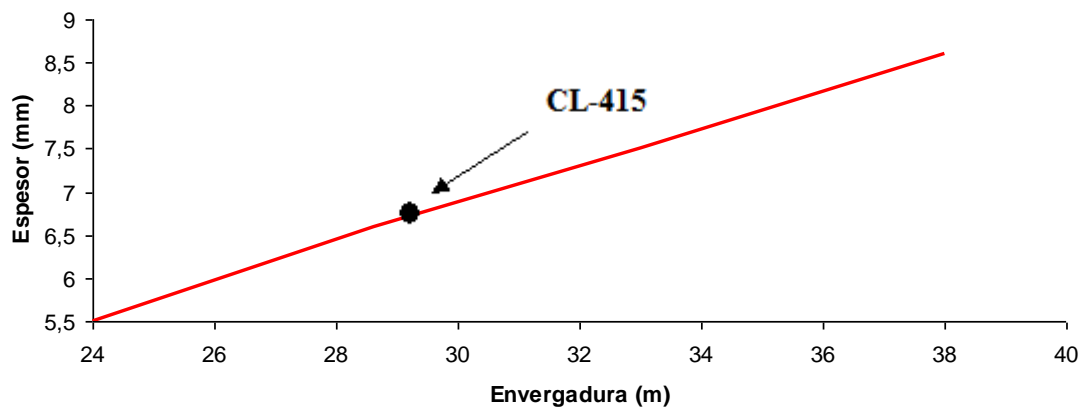


Figura 6.9: Relación entre el espesor del cajón de torsión y la envergadura.

Como se aprecia sigue una distribución perfectamente lineal ascendente, de manera que al aumentar la envergadura aumenta el espesor. Esto es debido en primer lugar a que un aumento de la envergadura implica un aumento del peso del ala, lo cual combinado con una mayor distancia del centro de gravedad al empotramiento produce un mayor momento flector en esta sección, dando lugar a mayores tensiones normales y por tanto requiriendo un espesor mayor para soportarlas.

En principio observando esa distribución sería lógico pensar que cuanto menor sea la envergadura más barato es el proceso pues tendría una necesidad inferior de material para la construcción del ala y del cajón de torsión. Sin embargo reducir la superficie del ala reduce la fuerza de sustentación empeorando de la misma forma la capacidad de vuelo a baja velocidad, por lo que necesitaría un mayor empuje por parte de los motores en el momento del despegue. Favorable a la reducción de la envergadura es que el avión resulta más manejable para realizar cualquier tipo de maniobra.

6.1.4.2. Envergadura frente al espesor que tendría el cajón de torsión si tuviera que soportar únicamente esfuerzos tangenciales

Puesto que los esfuerzos normales son superiores a los tangenciales, es el espesor calculado para soportar los primeros el crítico de diseño. A modo de curiosidad se representará la variación que experimenta el espesor del cajón de torsión necesario para soportar únicamente los esfuerzos tangenciales, figura 6.10.

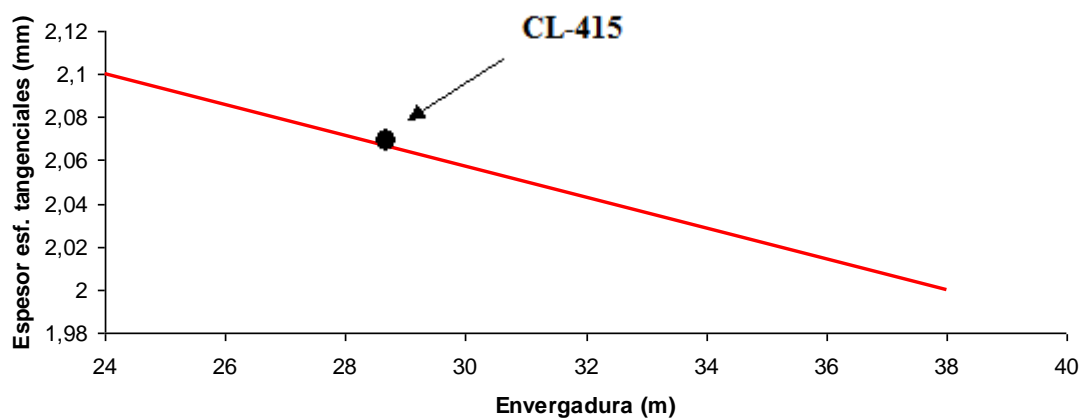


Figura 6.10: Relación entre el espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales y la envergadura.

A priori observando la figura 6.10 se podría decir que al contrario que sucedía al estudiar el espesor del cajón de torsión necesario para soportar los esfuerzos normales, el espesor requerido para soportar los esfuerzos tangenciales disminuye al aumentar la envergadura. Sin embargo fijándose en los valores ubicados en el eje Y se aprecia que el espesor necesario para soportar los esfuerzos tangenciales prácticamente no sufre variación, una décima de milímetro al variar la envergadura un rango de catorce metros.

6.1.4.3. Envergadura frente al peso del ala

Por último se representará frente a la envergadura otro factor relevante en el proceso de diseño, el peso del ala:

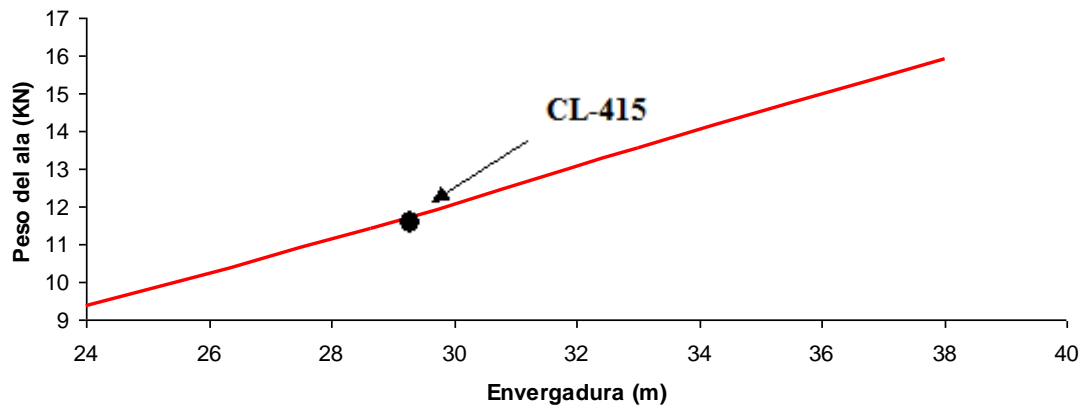


Figura 6.11: Relación entre el peso del ala y la envergadura.

Como se muestra en la figura 6.11 el peso del ala aumenta al aumentar la envergadura. Esto era lo esperado pues si aumenta una de las dimensiones del ala es lógico que aumente el peso de la misma.

6.2. Cuerda

En este punto se explicará las variaciones que sufre el proceso de diseño al modificar el valor de la cuerda.

Siguiendo el mismo esquema anterior se observa que las cargas explicadas en el punto (2.1.1) y el punto (2.1.2); es decir, el peso del motor y del flotador, no mantienen relación con la cuerda; es decir, se mantienen constantes a las variaciones de la misma.

Como era de esperar el peso del ala sí se muestra ligado a este parámetro.

Según la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 0,0051 \cdot (W_{dg} \cdot N_z)^{0,557} \cdot S_w^{0,649} \cdot A^{0,5} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)_{root}^{-0,4} \cdot (1 + \lambda)^{0,1} \cdot (\cos \beta)^{-1,0} \cdot S_{csw}^{0,1}$$

Donde los parámetros que experimentan cambios son los mismos que con la semienvergadura más un nuevo término:

- El área del ala: $S_w = c \cdot b$
- La relación o razón de aspecto: $A = \frac{b}{c}$
- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$ hace referencia a la relación del espesor con la cuerda en la raíz; es decir, en el empotramiento.

De nuevo observando la ecuación (2.3) se observa que la fuerza de sustentación se muestra invariante a la variación de la cuerda.

6.2.1. Cálculos con una cuerda igual a dos metros.

A continuación se mostrará el proceso de diseño del cajón de torsión cuando se disminuye la cuerda aproximadamente un metro y medio y se observará el espesor necesario para soportar los esfuerzos a los que está sometida el ala.

En primer lugar, como el peso del ala es la única fuerza que se ve afectada al variar la cuerda se recalcula.

- El área del ala: $S_w = 616,34 ft^2$ ($57,26 m^2$)
- La relación o razón de aspecto: $A = 14,32[]$
- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root} : \left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,28[]$

Por lo tanto, sustituyendo los nuevos valores en la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 1898,48 lb \text{ (861,16 Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 8439,37 N$$

Como se considera una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala, es decir de la semienvergadura.

$$W_{wing} = R(x) = 589,34 \frac{N}{m}$$

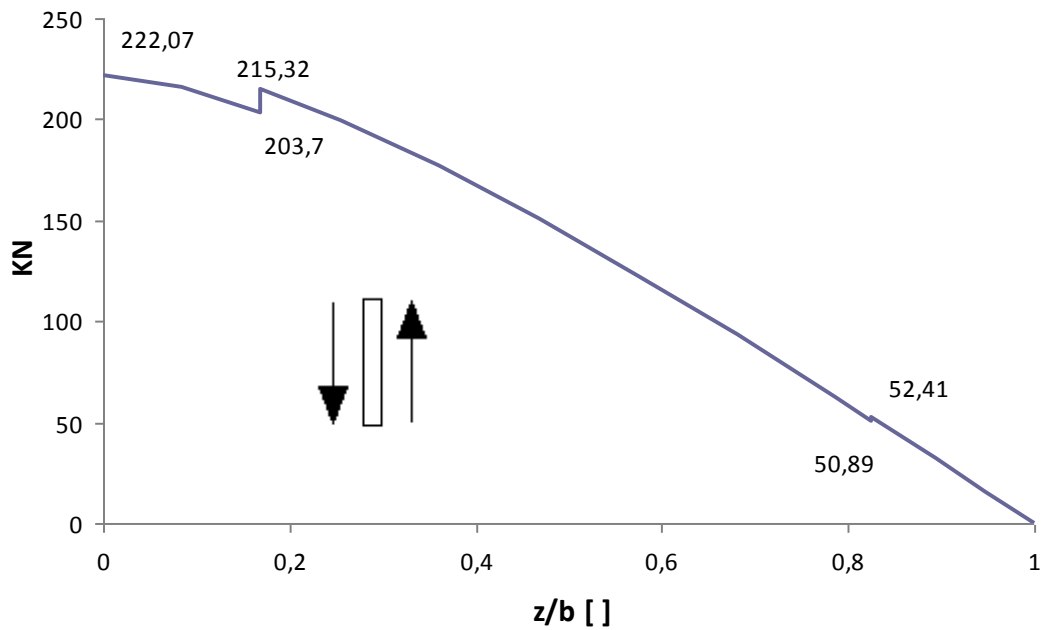


Figura 6.12: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 2m

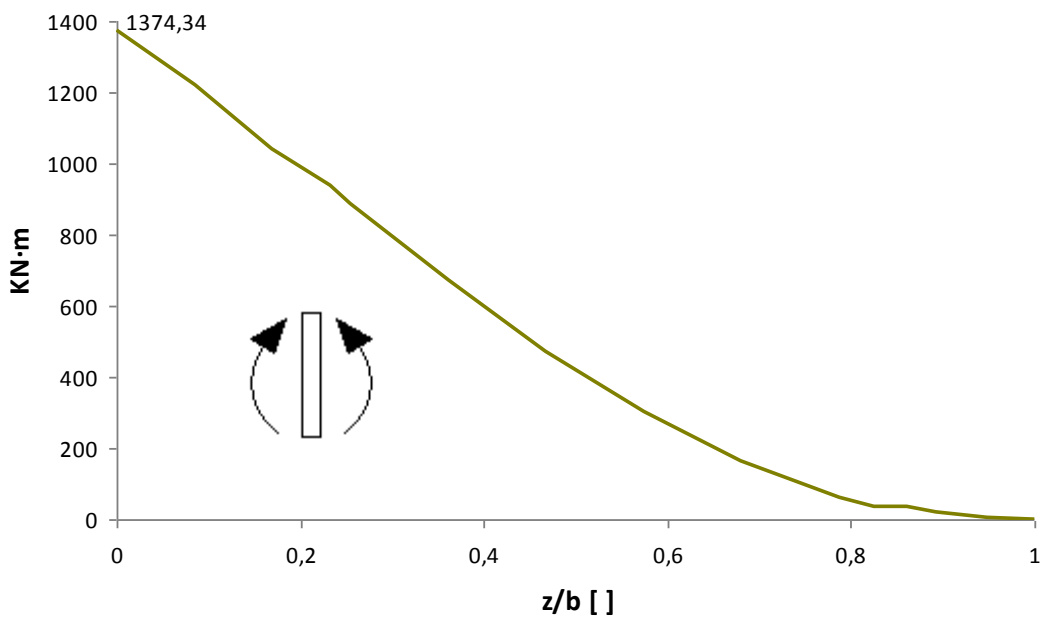


Figura 6.13: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 2m

$$Q_y = 222,07 \text{ KN}$$

$$M_x = 1374,34 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.8) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1832453,33 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{211495,24 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales se halla de la ecuación (5.9):

$$e \geq 0,0067 \text{ m}$$

Y para soportar los esfuerzos cortantes de la (5.10):

$$e \geq 0,0021 \text{ m}$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es el calculado para el flector.

$$e \geq 0,0067 \text{ m}$$

6.2.2. Cálculos con una cuerda igual a cuatro metros y medio.

En esta ocasión la cuerda aumenta y se observa la variación que sufren los parámetros asociados al proceso.

- El área del ala: $S_w = 1386,79 ft^2$ (128,84 m²)
- La relación o razón de aspecto: $A = 6,36[]$
- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root} : \left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,12[]$

Por lo tanto, sustituyendo los nuevos valores en la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 2966,92 lb \text{ (1345,77 Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 13188,55 N$$

Como se considera una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala, es decir de la semienvergadura.

$$W_{wing} = R(x) = 920,99 \frac{N}{m}$$

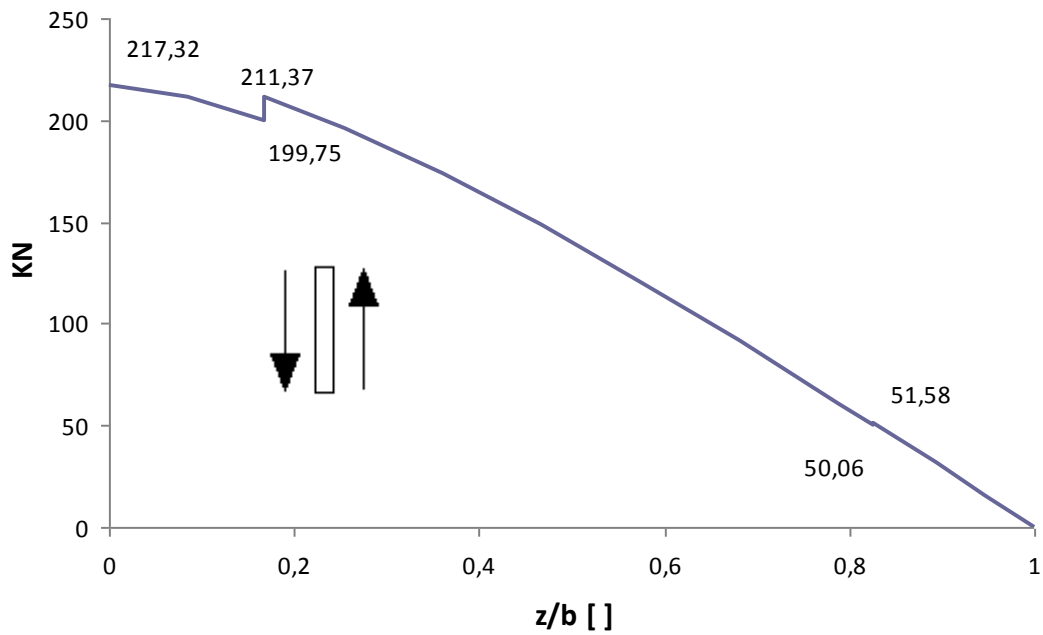


Figura 6.14: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 4,5m

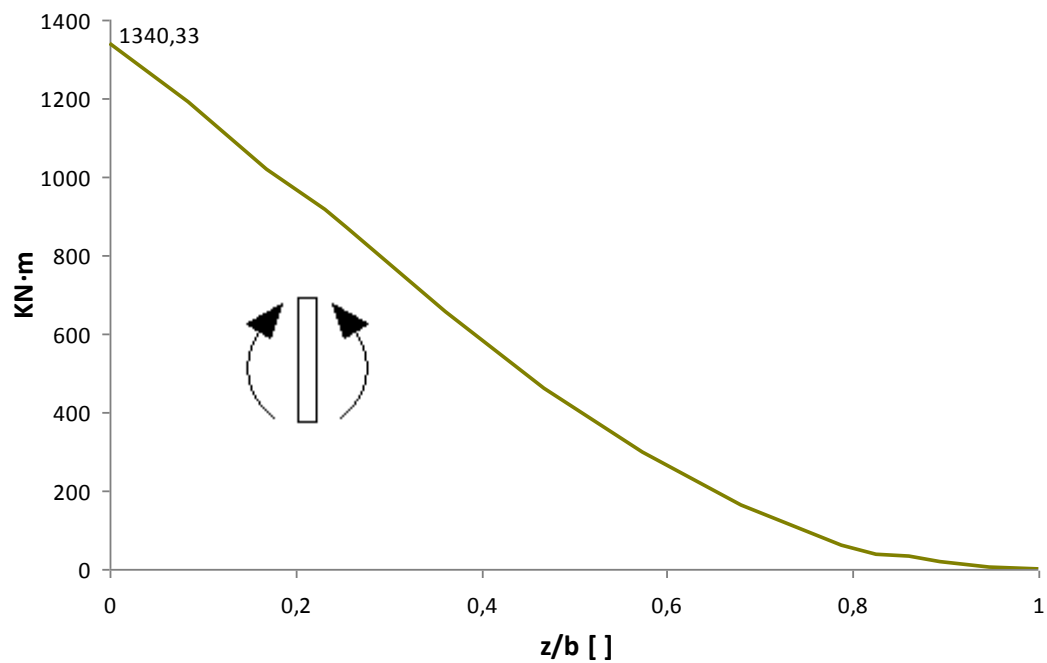


Figura 6.15: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 4,5m

$$Q_y = 217,32 \text{ KN}$$

$$M_x = 1340,33 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.8):

$$\sigma_z = \frac{1787106,67 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{206971,43 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales es el siguiente, ecuación (5.9):

$$e \geq 0,0065 \text{ m}$$

Y para soportar los esfuerzos cortantes, ecuación (5.10):

$$\frac{207920,558 \cdot 10^{-6}}{e} \leq \frac{152}{1,5}$$

$$e \geq 0,0020 \text{ m}$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es el calculado para el flector.

$$e \geq 0,0065 \text{ m}$$

6.2.23. Cálculos con una cuerda igual a seis metros.

- El área del ala: $S_w = 1849,02 ft^2$ (171,78 m²)
- La relación o razón de aspecto: $A = 4,77[]$
- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root} : \left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,093[]$

Por lo tanto, sustituyendo los nuevos valores en la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 3474,49lb \text{ (1576Kg)}$$

En unidades del sistema internacional:

$$W_{wing} = 15444,8N$$

Como se considera una carga distribuida constante a lo largo de la longitud del ala, es decir de la semienvergadura.

$$W_{wing} = R(x) = 1078,55 \frac{N}{m}$$

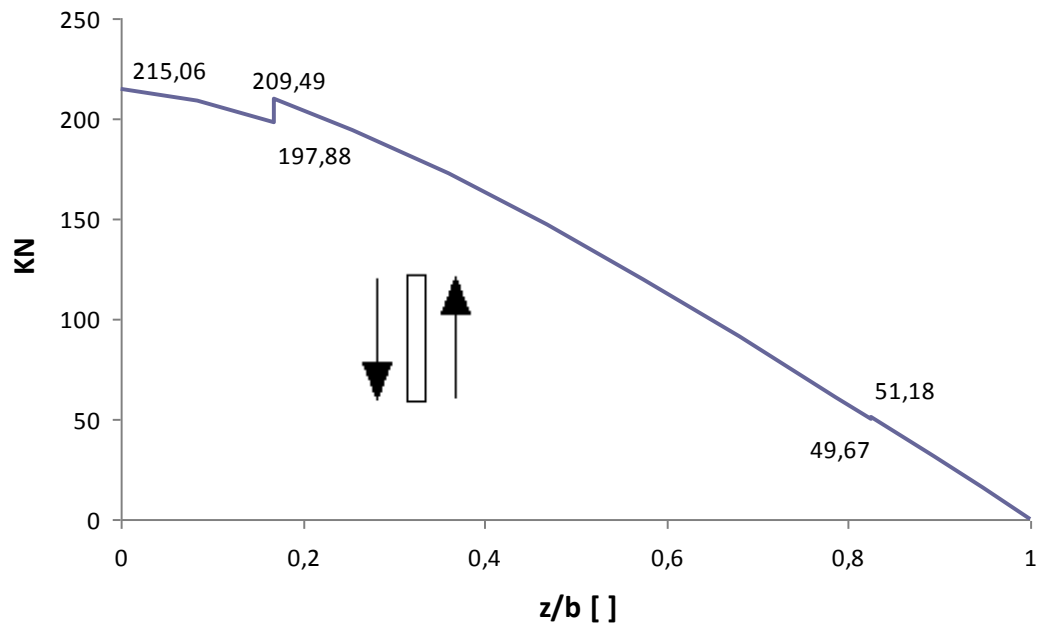


Figura 6.16: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para una cuerda de 6m

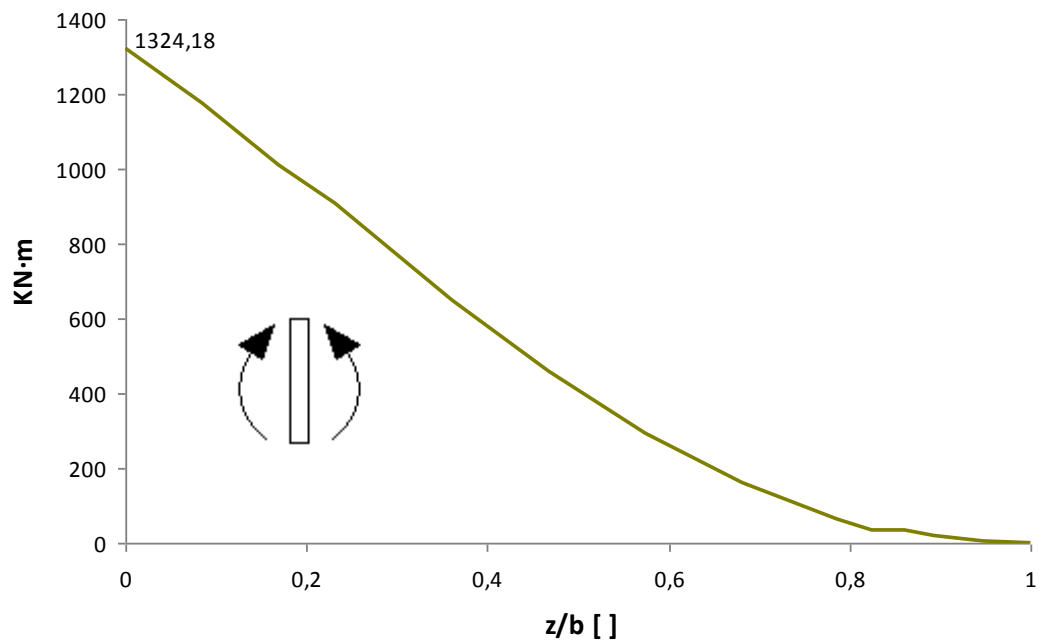


Figura 6.17: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una cuerda de 6m

$$Q_y = 215,06 \text{ KN}$$

$$M_x = 1324,18 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.8):

$$\sigma_z = \frac{1765573,33 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{204819,05 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales es el siguiente, ecuación (5.9):

$$e \geq 0,0065 \text{ m}$$

Y para soportar los esfuerzos cortantes se hace uso de la ecuación (5.10):

$$e \geq 0,0020 \text{ m}$$

Por lo tanto el espesor que se necesita con esta configuración es el calculado para el flector.

$$e \geq 0,0065 \text{ m}$$

6.2.4. Discusión de resultados

6.2.4.1. Cuerda frente al espesor del cajón de torsión

A continuación se muestra la variación que experimenta el espesor del cajón de torsión al variar la cuerda, figura 6.18.

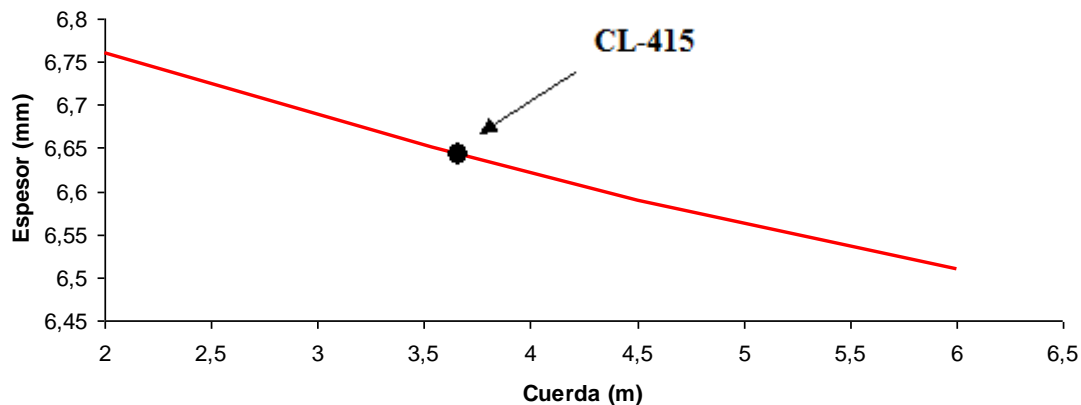


Figura 6.18: Relación del espesor del cajón de torsión con la cuerda.

Sigue una distribución aproximadamente lineal descendente; es decir, al contrario que ocurriría con la envergadura, al aumentar la cuerda disminuye el espesor del cajón de torsión. Esto es debido que al aumentar la cuerda aumenta del mismo modo la distancia entre largueros, y por tanto un aumento de las dimensiones del cajón de torsión, haciendo mayor la superficie que soporta los esfuerzos y por lo tanto el espesor necesario disminuye.

En principio con esta deducción sería normal pensar que un aumento de la cuerda del ala conduciría a una reducción del material empleado en la fabricación del cajón de torsión; sin embargo, como ya se ha mencionado, esa medida llevaría asociada un aumento de las dimensiones del cajón de torsión, neutralizando el efecto de reducción de material.

6.2.4.2. Envergadura frente al espesor del cajón de torsión necesario para calcular únicamente los esfuerzos tangenciales

De la misma manera que en el punto 6.2.4.1 se representará la variación que experimenta el espesor del cajón de torsión necesario para soportar los esfuerzos tangenciales.

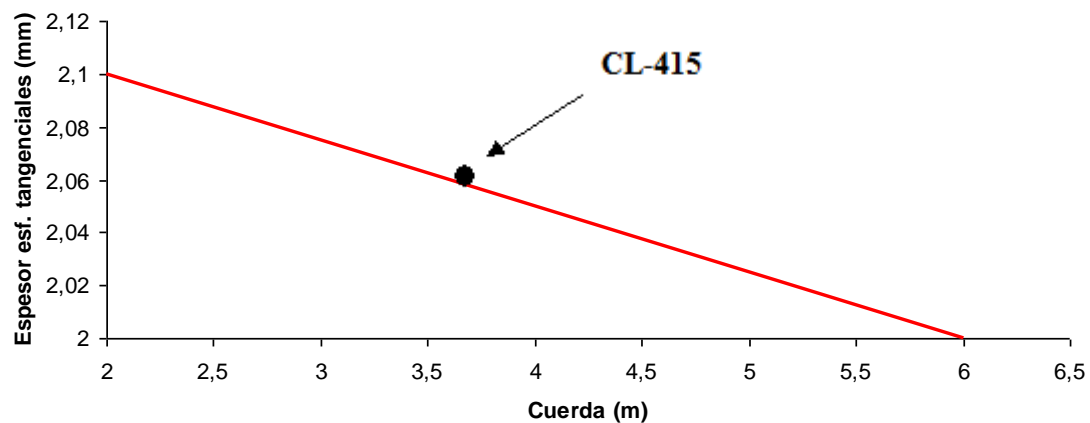


Figura 6.19: Relación entre el espesor del cajón de torsión que debiera tener si necesitara soportar únicamente esfuerzos tangenciales y la cuerda.

Como muestra el gráfico 6.19 ante un aumento de la cuerda se produce una disminución de los esfuerzos tangenciales, aunque de nuevo la variación vuelve a estar en el orden de una décima de milímetro.

6.2.4.3. Cuerda frente al peso del ala

Por último, se representará frente a la cuerda un parámetro importante en el proceso de diseño, el peso del ala.

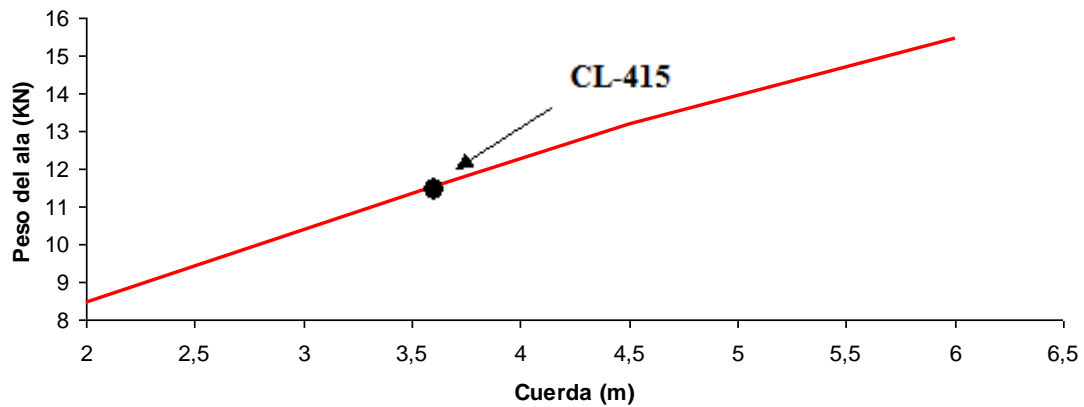


Figura 6.20: Relación entre el peso del ala y la cuerda.

Esta distribución observada en la figura 6.20 es la esperada, lineal ascendente, al aumentar el peso del ala aumenta la cuerda, esto es algo lógico, pues al aumentar una dimensión del ala aumentará del mismo modo el peso de la misma.

6.3. Posición de los motores

En este punto se estudiará la influencia de la posición de los motores, en la realidad se encuentran a 2,42 metros del empotramiento. Se comprobará qué ocurre si se acercan o si se alejan del punto de unión con el avión en sí.

Cambiar el lugar de los mismos no influye en ninguna de las cargas, por lo tanto el sistemas de fuerzas que actúa sobre el ala es el mismo que en el problema real.

Al variar únicamente la posición y no la magnitud de la fuerza el diagrama de esfuerzos cortantes se mantendrá invariante, y por lo tanto también el espesor que necesitará poseer el cajón para soportar dichos esfuerzos.

6.3.1. Cálculos con una ubicación de los motores de un metro y medio del empotramiento.

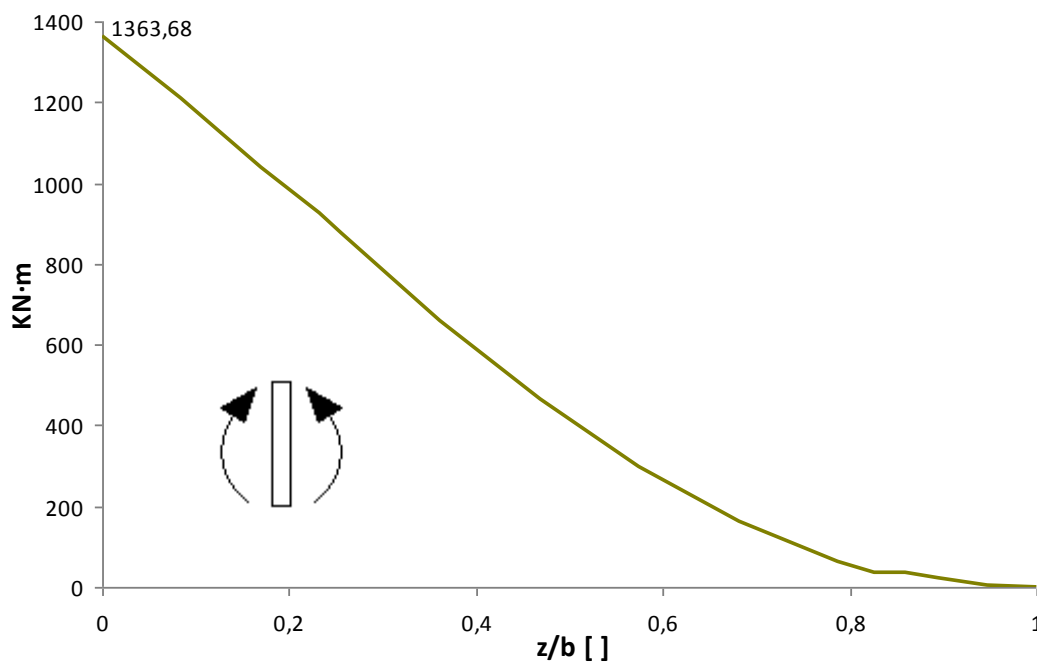


Figura 6.21: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 1,5 metros de la raíz.

$$M_x = 1363,68 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la ecuación (10.6) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1818240 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

El espesor requerido para soportar los esfuerzos normales se consigue haciendo uso de la ecuación (11.1):

$$e \geq 0,0066 \text{ m}$$

6.3.2. Cálculos con una ubicación de los motores de tres metros y medio del empotramiento.

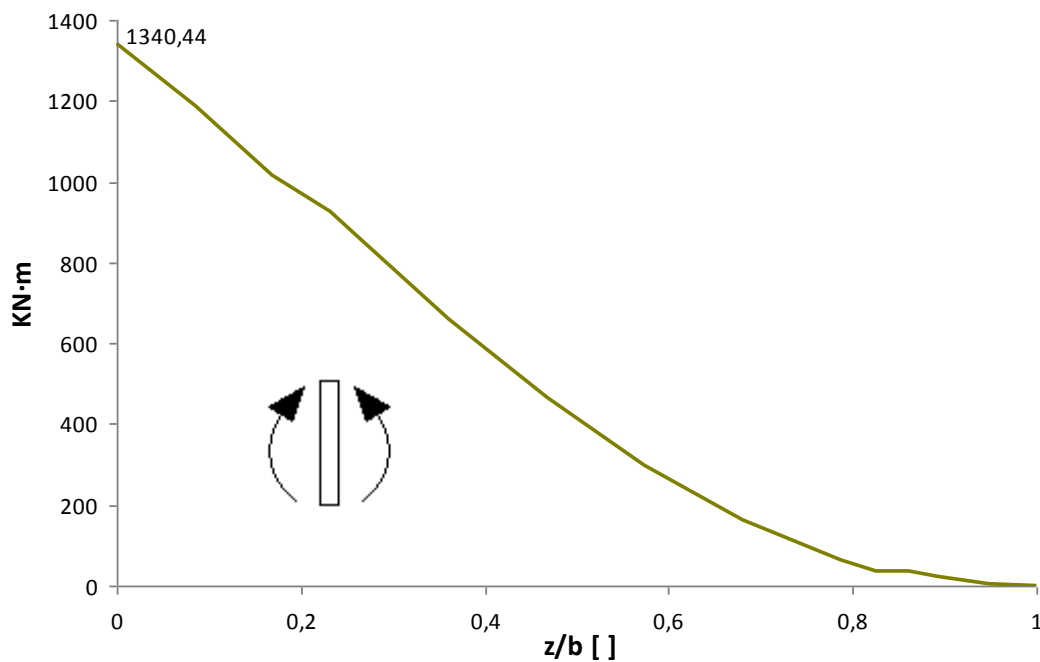


Figura 6.22: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 3,5 metros de la raíz.

$$M_x = 1340,44 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1787253,33 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

$$e \geq 0,0065m$$

6.3.3. Cálculo con una ubicación de los motores de cinco metros del empotramiento.

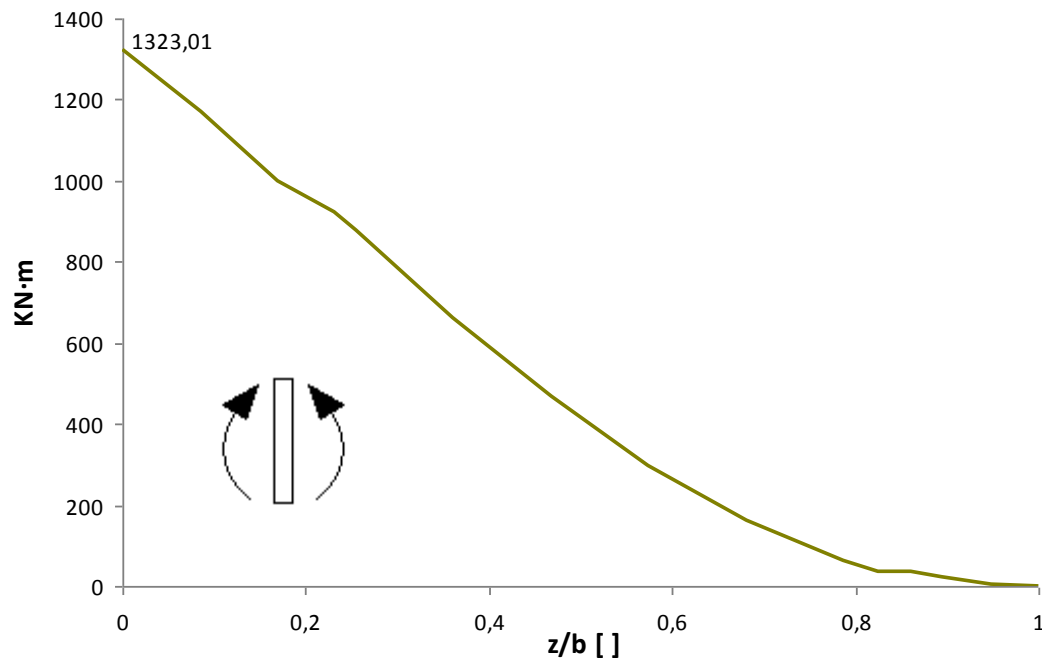


Figura 6.23: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los motores de 5 metros de la raíz.

$$M_x = 1323,01 KN \cdot m$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1764013,33 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

$$e \geq 0,0064m$$

6.3.4. Discusión de resultados

6.3.1. Posición del motor frente al espesor del cajón de torsión

A continuación se muestra la figura 6.24 que representa la relación del espesor del cajón de torsión frente a la distancia a la que se encuentra ubicado cada motor en el ala.

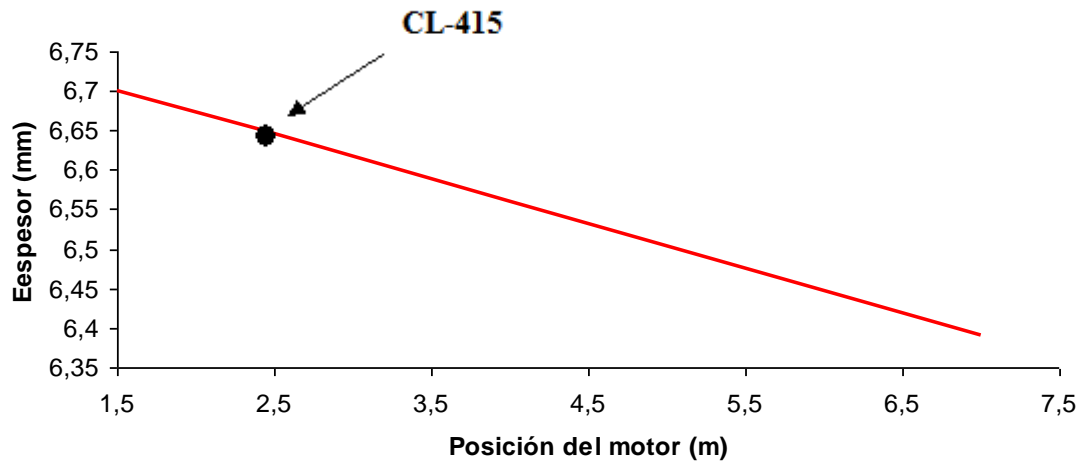


Figura 6.24: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia a la que se encuentran ubicados los motores.

Observando la gráfica 6.24 se aprecia que sigue una distribución lineal descendente; es decir, cuanto más se alejen los motores de la unión del ala con el avión propiamente dicho más se reduce el espesor del cajón de torsión.

Por esa deducción si se encuentran en el extremo del ala sería el estado óptimo, pero eso no es cierto pues supondría un problema de estabilidad.

6.4. Posición de los flotadores

Como ocurría en el punto anterior (6.3) el cambio de posición de los flotadores no cambia al sistema de fuerzas ejercidos sobre el ala ni los esfuerzos cortantes que soporta.

Los flotadores se encuentran posicionados a 11,82 m del empotramiento.

6.4.1. Cálculos con una ubicación de los flotadores de trece metros y medio del empotramiento.

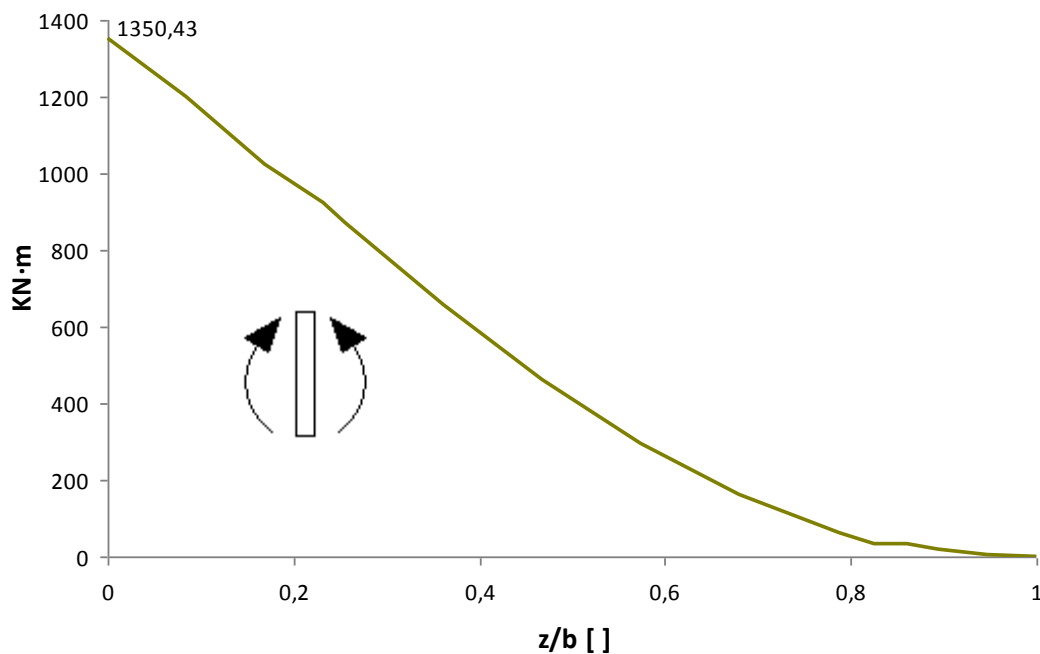


Figura 6.25: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 13,5 metros de la raíz.

$$M_x = 1350,43 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la ecuación (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1800573,33 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0066 \text{ m}$$

6.4.2. Cálculos con una ubicación de los flotadores de nueve metros y medio del empotramiento.

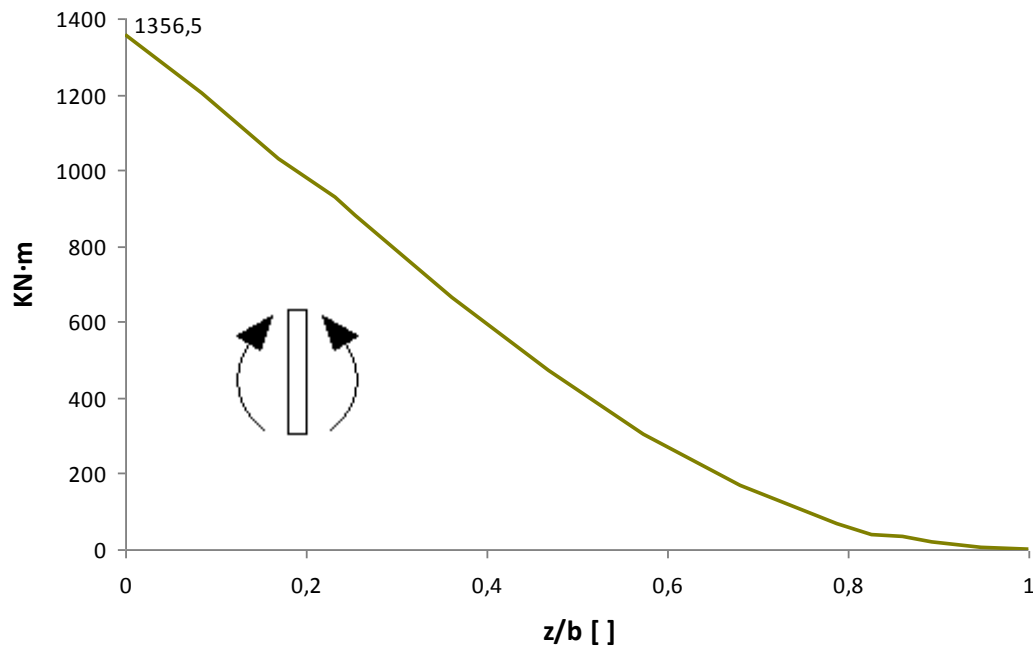


Figura 6.26: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 9,5 metros de la raíz.

$$M_x = 1356,5 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1808666,67 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0066 \text{ m}$$

6.4.3. Cálculos con una ubicación de los flotadores de ocho metros del empotramiento.

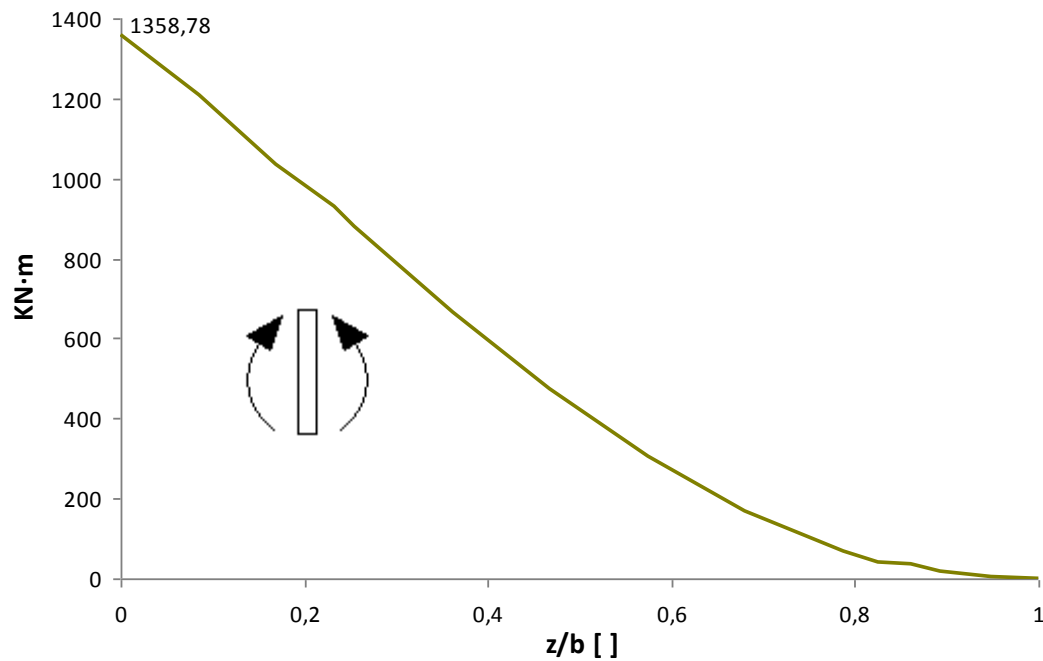


Figura 6.27: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para una ubicación de los flotadores de 8 metros de la raíz.

$$M_x = 1358,78 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Despejando de las ecuaciones (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1811706,67 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0066 \text{ m}$$

6.4.4. Discusión de resultados

6.4.4.1. Posición del flotador frente al espesor del cajón de torsión

El espesor del cajón de torsión varía con la posición del flotador en el ala de la siguiente manera:

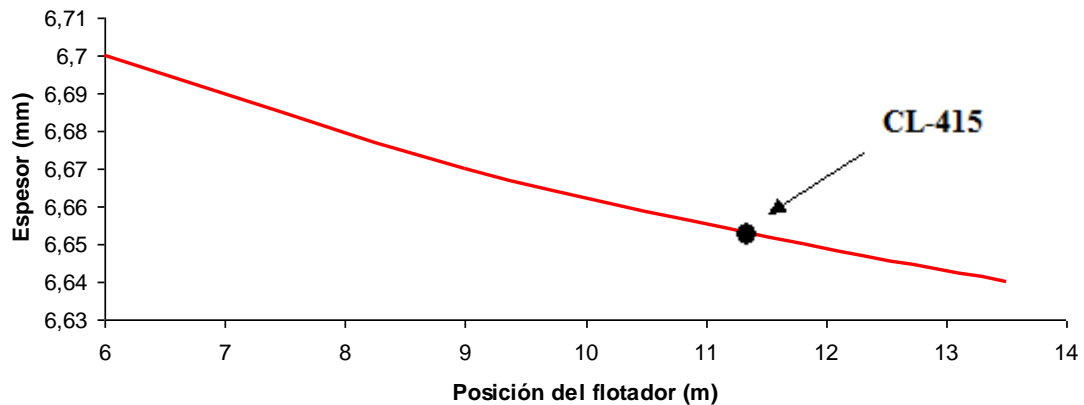


Figura 6.28: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia a la que se encuentran ubicados los flotadores.

Observando la gráfica 6.28 se aprecia que sigue una distribución descendente; es decir, como ocurre con la posición de los motores cuanto más se alejen los flotadores del empotramiento más se reduce el espesor del cajón de torsión.

Sin embargo si se aprecia el eje vertical se observa que el espesor prácticamente no experimenta variación al cambiar el flotador de posición, seis centésimas al mover el flotador en un rango de seis metros y medio; por lo tanto se podría considerar despreciable la posición de los flotadores.

6.5. Espesor del ala

Como se ha realizado en los dos puntos anteriores a continuación se mostrará las fuerzas que se ven involucradas en un cambio al variar el espesor del ala.

Como era de prever el espesor del ala no influye ni en el peso del motor, ni en el peso del flotador, ni en la fuerza de sustentación; pero si influye en un término perteneciente a la ecuación (2.2)

$$M_{wing} = 0,0051 \cdot (W_{dg} \cdot N_z)^{0,557} \cdot S_w^{0,649} \cdot A^{0,5} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)_{root}^{-0,4} \cdot (1 + \lambda)^{0,1} \cdot (\cos \beta)^{-1,0} \cdot S_{csw}^{0,1}$$

- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$, el cual hace referencia a la relación del espesor con la cuerda en la raíz; es decir, en el empotramiento.

Por último, el espesor del ala influye de manera directa en el diseño del cajón de torsión, pues como se observa en el cutaway mostrado en la imagen 5.2, la altura del mismo es el espesor del perfil, por lo tanto los parámetros calculados en el punto 5 deberán ser modificados.

En primer lugar se modificarán los parámetros geométricos que se muestren asociados a este término:

Despejando de la ecuación (5.2) se obtendrá el dentro de gravedad, y de la ecuación (5.4) el momento de inercia:

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_i}{\sum A_i}$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4}$$

$$I_x = 2 \cdot d \cdot e \cdot \frac{h^2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot e \cdot h^3 = d \cdot e \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot e \cdot h^3 = e \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \left(d + \frac{1}{3} \cdot h\right)$$

Para el cálculo del espesor necesario para soportar los esfuerzos tangenciales se seguirá paso a paso el punto 5.4 modificando en cada caso los términos que sean precisos.

Según la ecuación (4.30):

$$q_v(z, s) = q_v(z, 0) + q_{vA}(z, s)$$

Donde según las ecuaciones (5.7) y (4.32):

$$q_{vA}(z, s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot m_x^*(s)$$

$$q_v(0) = \frac{-\int_0^s \frac{q_{vA}(z, s)}{e(s)} \cdot \partial s}{\int_0^s \frac{1}{e(s)} \cdot \partial s} = -\frac{1}{S} \cdot \int_0^s q_{vA}(s) \cdot \partial s$$

Se aplicará esta ecuación a cada uno de los cinco tramos presentes en el perfil.

6.5.1. Cálculos con un espesor del ala de cuarenta centímetros

En este apartado se estudiará la influencia en el proceso al disminuir la altura del cajón de torsión, pasando de cincuenta y seis centímetros a cuarenta.

En primer lugar se recalcula la única fuerza que está ligada a este término:

- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$

$$\left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,11[]$$

Según la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 2952,76lb \text{ (1339,35 Kg)}$$

En unidades de sistema internacional:

$$W_{wing} = 13125,63N$$

Al ser considerada una carga distribuida:

$$W_{wing} = R(x) = 916,59 \frac{N}{m}$$

En resto de fuerzas se mantienen invariantes:

Peso del motor $\rightarrow W_T = 11620,15N$

Peso del flotador $\rightarrow W_F = 1519N$

Peso del ala $\rightarrow W_{wing} = R(x) = 916,59 \frac{N}{m}$

Fuerza de sustentación $\rightarrow l(x) = 1512,81 \cdot \sqrt{14,32^2 - x^2}$

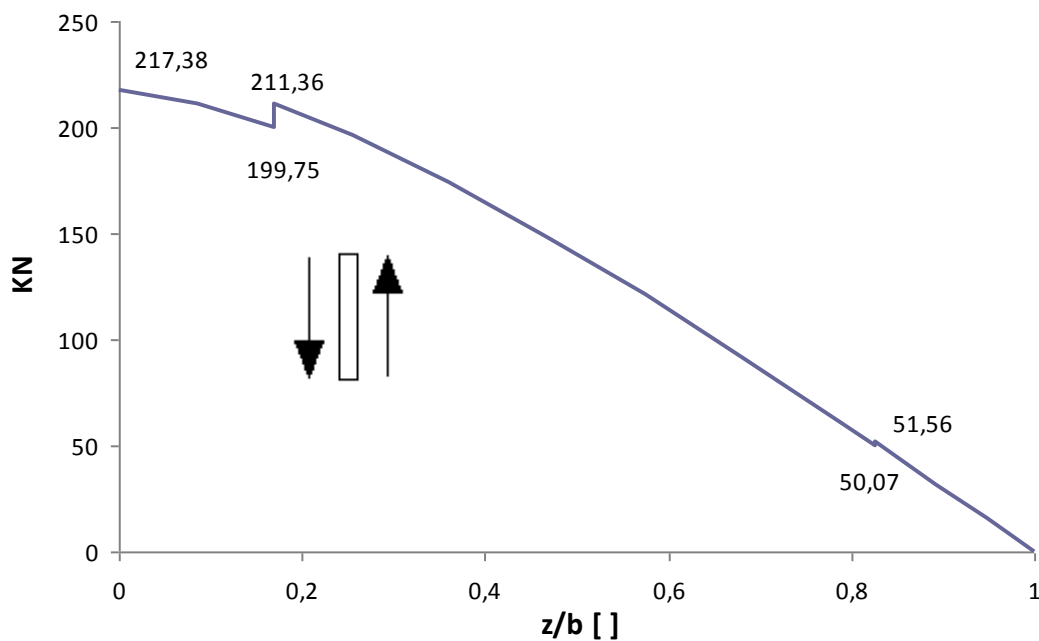


Figura 6.29: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de 40cm.

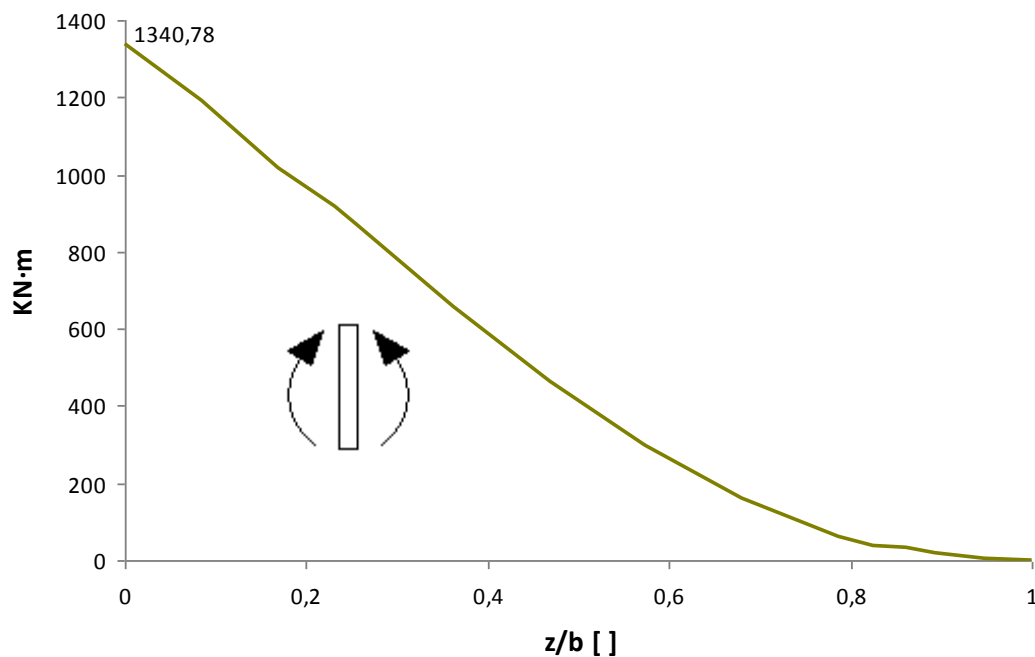


Figura 6.30: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de 40cm.

$$Q_y = 217,38 \text{ KN}$$

$$M_x = 1340,78 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

A continuación se modifican los parámetros geométricos en los que interviene la altura del cajón de torsión:

Según la ecuación (5.2) y (5.4) se muestran los nuevos valores de centro de gravedad y momento de inercia respectivamente:

$$Y_G = 0,20 \text{ m}$$

$$I_x = (0,10 \cdot e) \text{ m}^4$$

Despejando de la ecuación (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{2681560 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0098 \text{ m}$$

Según la ecuación (5.7), y aplicándolo a cada uno de los tramos que forman el perfil:

Tramo 1-2

$$q_{vA}(s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \frac{e \cdot s^2}{2}$$

Tramo 2-3

$$q_{vA}(s_1) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,02 \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_1)$$

Tramo 3-4

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,02 \cdot e + 0,23 \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,25 \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

Tramo 4-5

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,02 \cdot e + 0,23 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,25 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_3)$$

Tramo 5-1

$$q_{vA}(s_4) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,02 \cdot e + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

A continuación se halla $q_v(0)$ mediante la ecuación (4.32).

$$S = 2 \cdot (d + h) = 3,08m$$

$$q_v(0) = 0,14 \cdot e \cdot \frac{Q_y(z)}{I_x}$$

Finalmente, se puede determinar el flujo de tensiones a partir de la ecuación (4.30)

$$q_v(z, s) = q_v(z, 0) + q_{vA}(z, s)$$

$$q_v(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,14 \cdot e - \frac{s^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s \leq 0,20)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,14 \cdot e - 0,02 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_1) \quad (0 \leq s_1 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,12 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_1)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,14 \cdot e - 0,25 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s_2 \leq 0,40)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(-0,12 \cdot e - 0,20 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,14 \cdot e - 0,25 \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_3) \quad (0 \leq s_3 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (-0,12 \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,14 \cdot e - 0,02 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_4 \right) \quad (0 \leq s_4 \leq 0,20)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,12 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,20 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

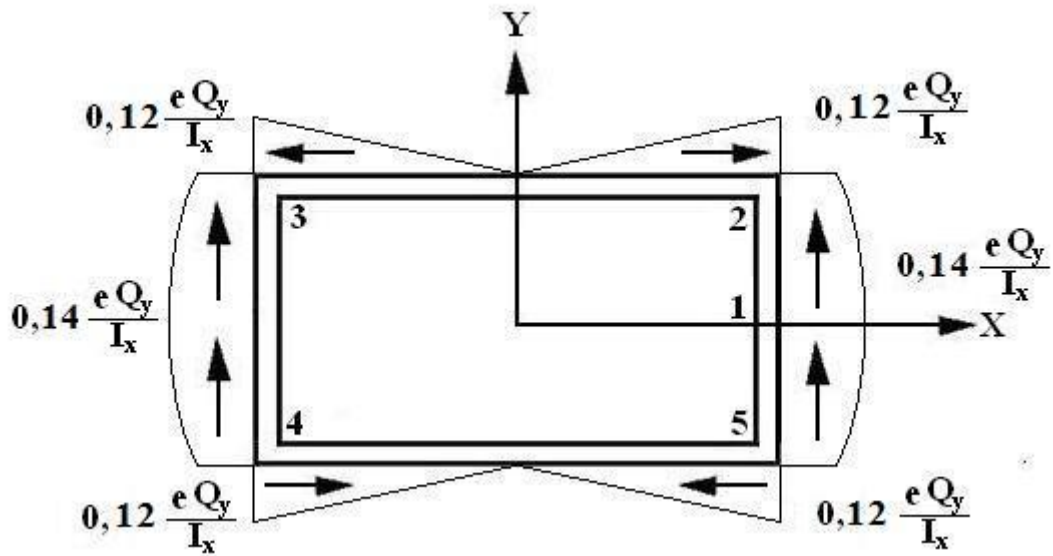


Figura 6.31: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a 40cm.

Como la máxima tensión tangencial se produce en los puntos del perfil contenidos en el eje X:

$$(\tau_{zs})_{MAX} = -\tau_{zs}(0) = \tau_{zs_2}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{0,14 \cdot e \cdot Q_y}{e \cdot I_x} = 0,14 \cdot \frac{Q_y}{I_x} \quad (6.1)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior (6.1):

$$\tau_z = \frac{304332 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

Despejando de la ecuación (5.10):

$$e \geq 0,0030m$$

Como el espesor debe soportar tanto los esfuerzos normales como tangenciales:

$$e \geq 0,0097m$$

6.5.2. Cálculos con un espesor del ala de ochenta centímetros

En este apartado se estudiará la influencia en el proceso al aumentar la altura del cajón de torsión.

En primer lugar se recalcula la única fuerza que está ligada a este término:

- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$

$$\left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,23[\quad]$$

Según la ecuación (4.2):

$$W_{wing} = 2237,78lb \text{ (1015,04Kg)}$$

En unidades de sistema internacional:

$$W_{wing} = 9947,39N$$

Al ser considerada una carga distribuida:

$$W_{wing} = R(x) = 694,65 \frac{N}{m}$$

En resto de fuerzas se mantienen invariantes:

$$\text{Peso del motor} \rightarrow W_T = 11620,15N$$

$$\text{Peso del flotador} \rightarrow W_F = 1519N$$

$$\text{Peso del ala} \rightarrow W_{wing} = R(x) = 694,65 \frac{N}{m}$$

$$\text{Fuerza de sustentación} \rightarrow I(x) = 1512,8 \cdot \sqrt{14,32^2 - x^2}$$

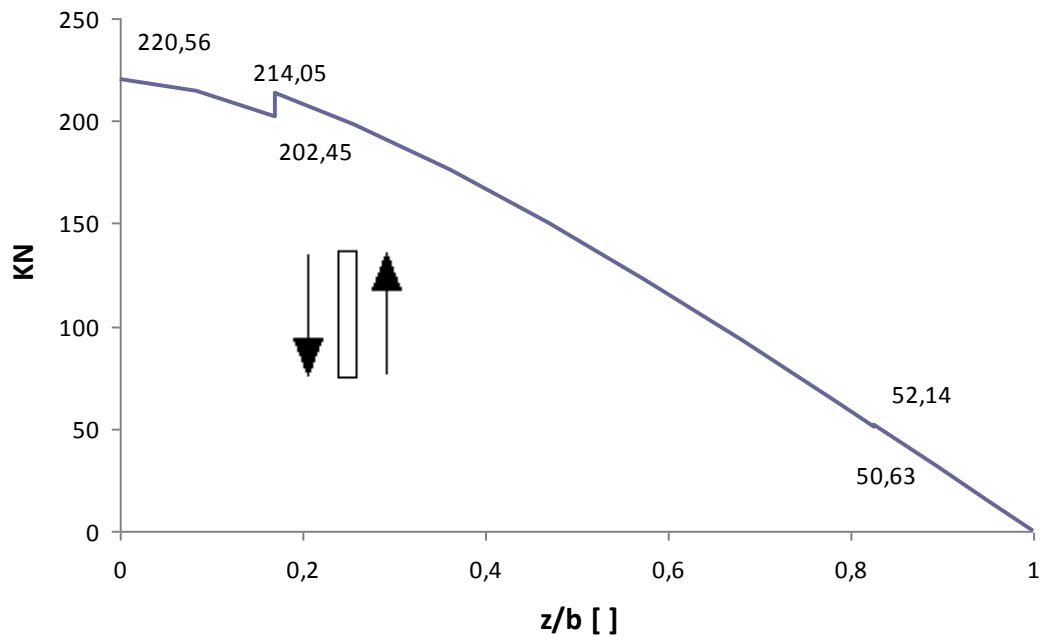


Figura 6.32: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de 80cm.

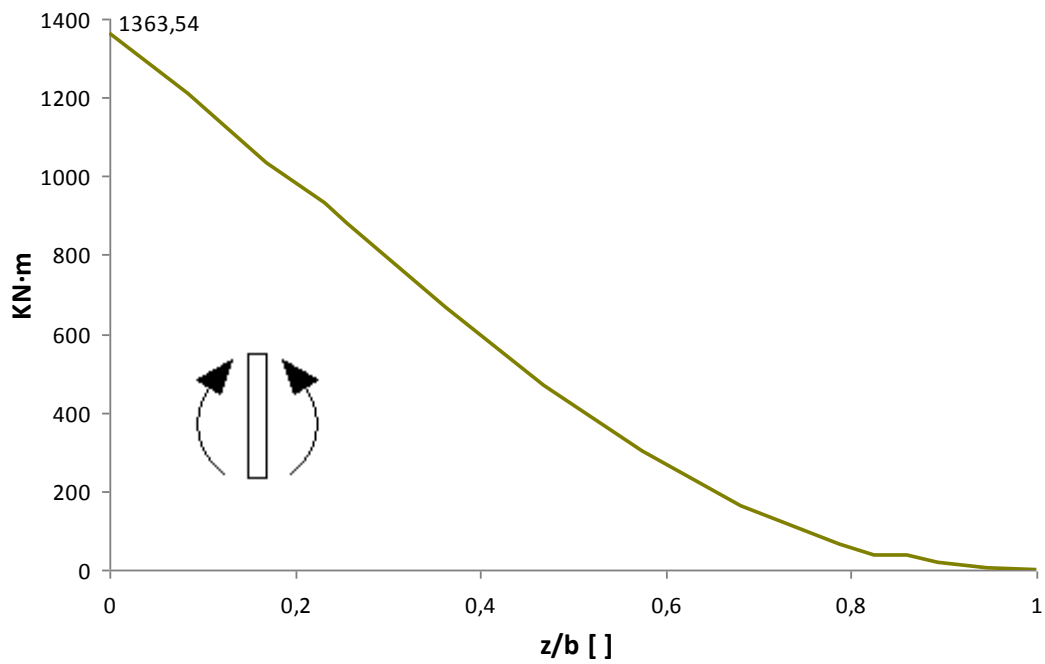


Figura 6.33: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de 80cm.

$$Q_y = 220,56 \text{ KN}$$

$$M_x = 1363,54 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Según la ecuación (5.2) y (5.4) se muestran los nuevos valores de centro de gravedad y momento de inercia respectivamente:

$$Y_G = 0,40 \text{ m}$$

$$I_x = (0,45 \cdot e) \text{ m}^4$$

Despejando de la ecuación (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{1212035,56 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0044 \text{ m}$$

Según la ecuación (5.7), y aplicándolo a cada uno de los tramos que forman el perfil:

Tramo 1-2

$$q_{vA}(s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \frac{e \cdot s^2}{2}$$

Tramo 2-3

$$q_{vA}(s_1) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,08 \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_1)$$

Tramo 3-4

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,08 \cdot e + 0,46 \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,54 \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

Tramo 4-5

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,08 \cdot e + 0,46 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,54 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_3)$$

Tramo 5-1

$$q_{vA}(s_4) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,08 \cdot e + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

A continuación se halla $q_v(0)$ mediante la ecuación (4.32).

$$S = 2 \cdot (d + h) = 3,88m$$

$$q_v(0) = 0,31 \cdot e \cdot \frac{Q_y(z)}{I_x}$$

Finalmente, se puede determinar el flujo de tensiones a partir de la ecuación (4.30)

$$q_v(z, s) = q_v(z, 0) + q_{vA}(z, s)$$

$$q_v(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,31 \cdot e - \frac{s^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s \leq 0,40)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,31 \cdot e - 0,08 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_1) \quad (0 \leq s_1 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,23 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_1)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,31 \cdot e - 0,54 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s_2 \leq 0,80)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(-0,23 \cdot e - 0,40 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,31 \cdot e - 0,54 \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_3) \quad (0 \leq s_3 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (-0,23 \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,31 \cdot e - 0,08 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_4 \right) \quad (0 \leq s_4 \leq 0,40)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,23 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,40 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

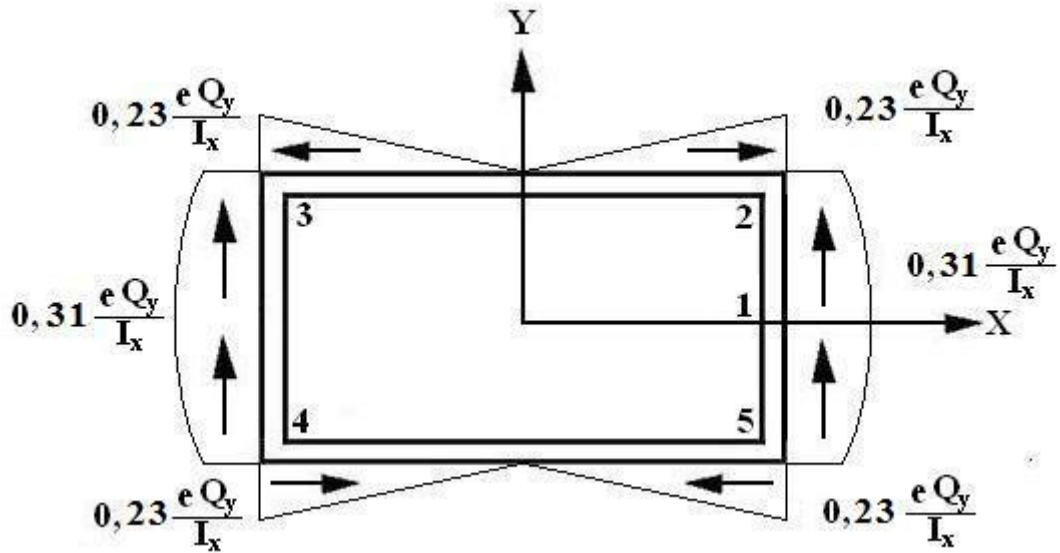


Figura 6.34: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a 80cm.

Como la máxima tensión tangencial se produce en los puntos del perfil contenidos en el eje X:

$$(\tau_{zs})_{MAX} = -\tau_{zs}(0) = \tau_{zs_2}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{0,31 \cdot e \cdot Q_y}{e \cdot I_x} = 0,31 \cdot \frac{Q_y}{I_x} \quad (6.2)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.2) y (5.10):

$$\tau_z = \frac{151941,33 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

$$e \geq 0,0015m$$

Como el espesor debe soportar tanto los esfuerzos normales como tangenciales:

$$e \geq 0,0044m$$

6.5.3. Cálculos con un espesor del ala de un metro

En este apartado se estudiará la influencia en el proceso al aumentar la altura del cajón de torsión.

En primer lugar se recalcula la única fuerza que está ligada a este término:

- El término $\left(\frac{t}{c}\right)_{root}$

$$\left(\frac{t}{c}\right)_{root} = 0,28[]$$

Según la ecuación (2.2):

$$M_{wing} = 2048,14lb \text{ (929,02Kg)}$$

En unidades de sistema internacional:

$$W_{wing} = 9104,42N$$

Al ser considerada una carga distribuida:

$$W_{wing} = R(x) = 635,78 \frac{N}{m}$$

En resto de fuerzas se mantienen invariantes:

Peso del motor $\rightarrow W_T = 11620,15N$

Peso del flotador $\rightarrow W_F = 1519N$

Peso del ala $\rightarrow W_{wing} = R(x) = 635,78 \frac{N}{m}$

Fuerza de sustentación $\rightarrow l(x) = 1512,81 \cdot \sqrt{14,32^2 - x^2}$

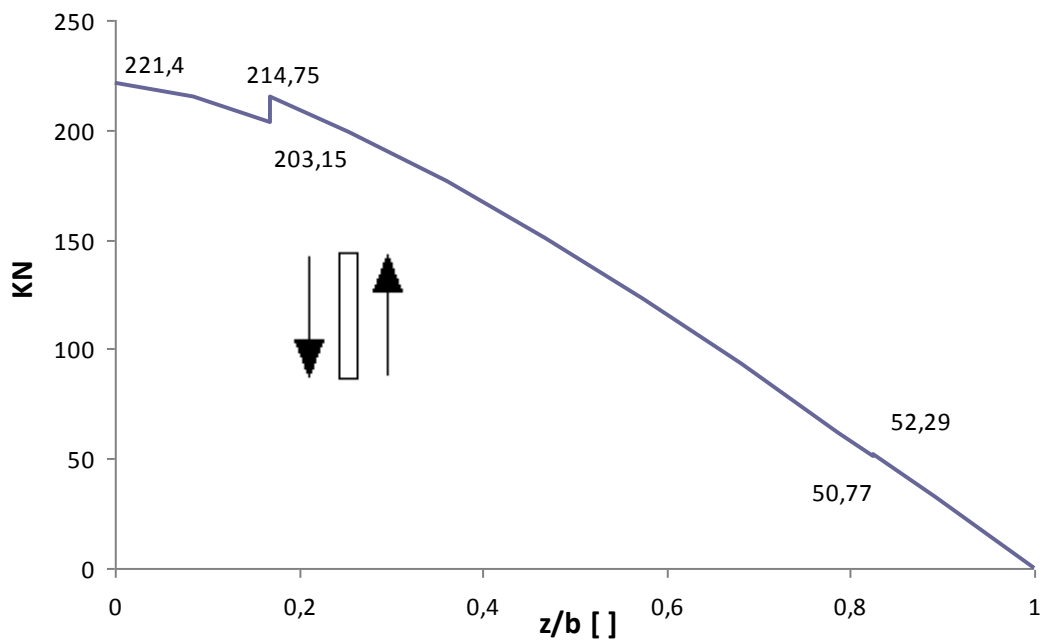


Figura 6.35: Diagrama de esfuerzos cortantes en maniobra simétrica para un espesor del ala de 1m.

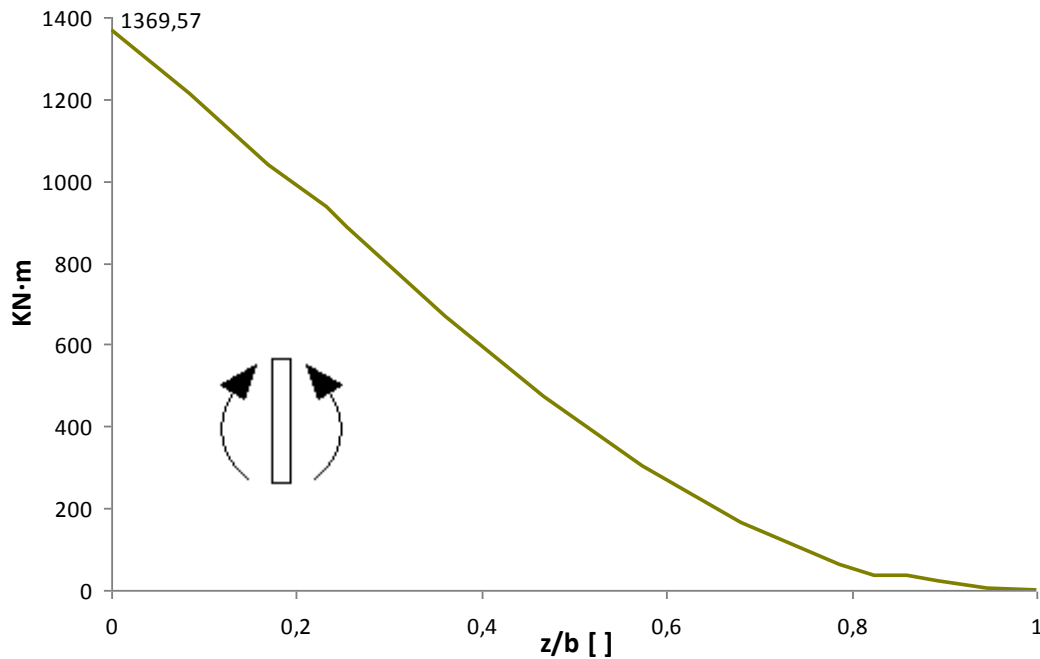


Figura 6.36: Diagrama de esfuerzos flectores en maniobra simétrica para un espesor del ala de 1m.

$$Q_y = 221,40 \text{ KN}$$

$$M_x = 1369,57 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Según la ecuación (5.2) y (5.4) se muestran los nuevos valores de centro de gravedad y momento de inercia respectivamente:

$$Y_G = 0,5 \text{ m}$$

$$I_x = (0,74 \cdot e) \text{ m}^4$$

Despejando de la ecuación (5.6) y (5.9) se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{925385,14 \cdot 10^{-6}}{e} \text{ MPa}$$

$$e \geq 0,0034 \text{ m}$$

Según la ecuación (5.7) y aplicándolo a cada uno de los tramos que forman el perfil:

Tramo 1-2

$$q_{vA}(s) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \frac{e \cdot s^2}{2}$$

Tramo 2-3

$$q_{vA}(s_1) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,12 \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_1)$$

Tramo 3-4

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,12 \cdot e + 0,57 \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

$$q_{vA}(s_2) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,7 \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_2 - e \cdot \frac{s_2^2}{2} \right)$$

Tramo 4-5

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,12 \cdot e + 0,57 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_{vA}(s_3) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot (0,7 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_3)$$

Tramo 5-1

$$q_{vA}(s_4) = -\frac{Q_y(z)}{I_x} \cdot \left(0,12 \cdot e + \frac{s_4^2}{2} \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

A continuación se halla $q_v(0)$ mediante la ecuación (4.32).

$$S = 2 \cdot (d + h) = 4,28m$$

$$q_v(0) = 0,41 \cdot e \cdot \frac{Q_y(z)}{I_x}$$

Finalmente, se puede determinar el flujo de tensiones a partir de la ecuación (4.30)

$$q_v(z, s) = q_v(z, 0) + q_{vA}(z, s)$$

$$q_v(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,41 \cdot e - \frac{s^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s \leq 0,50)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,41 \cdot e - 0,12 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_1) \quad (0 \leq s_1 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_1) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,29 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_1)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,41 \cdot e - 0,7 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right) \quad (0 \leq s_2 \leq 1)$$

$$q_v(s_2) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(-0,29 \cdot e - 0,50 \cdot e \cdot s_2 + \frac{s_2^2}{2} \cdot e \right)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,41 \cdot e - 0,7 \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_3) \quad (0 \leq s_3 \leq 1,14)$$

$$q_v(s_3) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (-0,29 \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_3)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,41 \cdot e - 0,12 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_4 \right) \quad (0 \leq s_4 \leq 0,50)$$

$$q_v(s_4) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left(0,29 \cdot e - \frac{s_4^2}{2} \cdot e + 0,50 \cdot e \cdot s_4 \right)$$

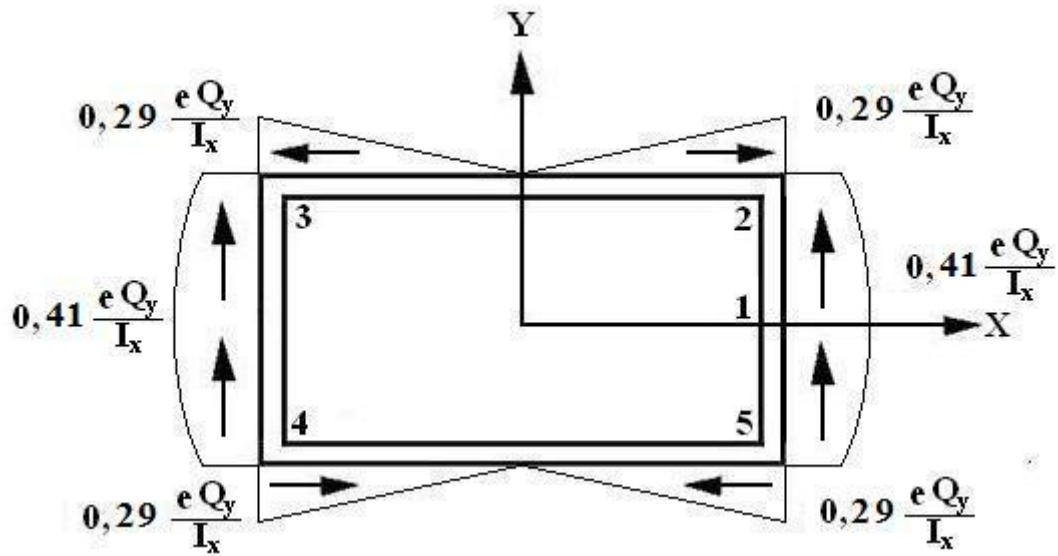


Figura 6.37: Distribución del flujo cortante para un espesor igual a 1m.

Como la máxima tensión tangencial se produce en los puntos del perfil contenidos en el eje X:

$$(\tau_{zs})_{MAX} = -\tau_{zs}(0) = \tau_{zs_2}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{0,41 \cdot e \cdot Q_y}{e \cdot I_x} = 0,41 \cdot \frac{Q_y}{I_x} \quad (6.3)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.3) y (5.10):

$$\tau_z = \frac{122667,57 \cdot 10^{-6}}{e} MPa$$

$$e \geq 0,0012m$$

Como el espesor debe soportar tanto los esfuerzos normales como tangenciales:

$$e \geq 0,0034m$$

6.5.4. Discusión de los resultados

6.5.4.1. Espesor del ala frente al espesor del cajón de torsión

A continuación se muestra como varía el espesor del cajón de torsión al variar el espesor del perfil, figura 6.38 y como varía el espesor que debería tener el cajón de torsión si únicamente debiera soportar esfuerzos tangenciales, figura 6.39.

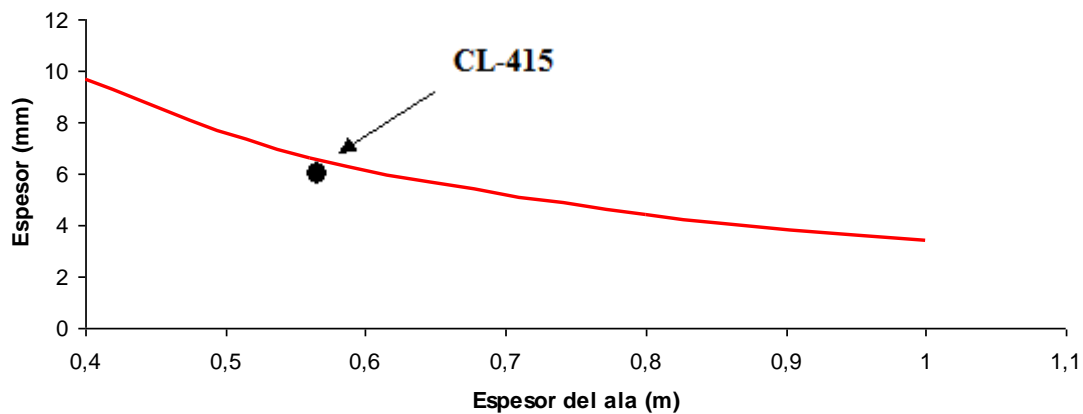


Figura 6.38: Relación entre el espesor del cajón de torsión y el espesor del ala.

6.5.4.2. Espesor del ala frente al espesor del cajón de torsión que necesitaría si soportara únicamente esfuerzos tangenciales

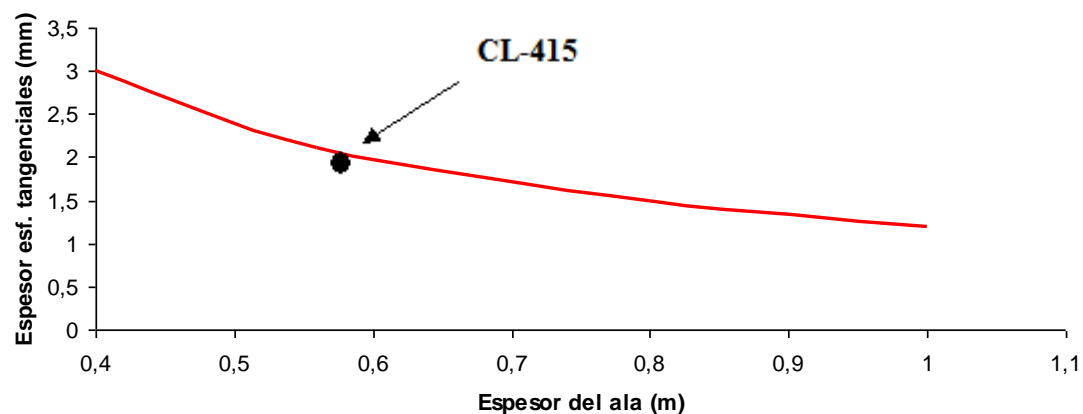


Figura 6.39: Relación entre el espesor del cajón de torsión si solamente soportara esfuerzos tangenciales y el espesor del ala.

Como se observa ambas gráficas siguen distribuciones similares, parabólica descendente, de manera que al aumentar el espesor del ala disminuye el espesor del cajón de torsión. Esto es debido a que al aumentar el espesor del perfil aumenta el momento de inercia por lo que las tensiones transmitidas a la estructura son menores, ecuaciones (5.6) y (5.8).

6.5.4.3. Espesor del perfil frente al peso del ala

Por último como variable importante en el proceso se representa también la variación que experimenta el peso del con el espesor de la misma, figura 6.40.

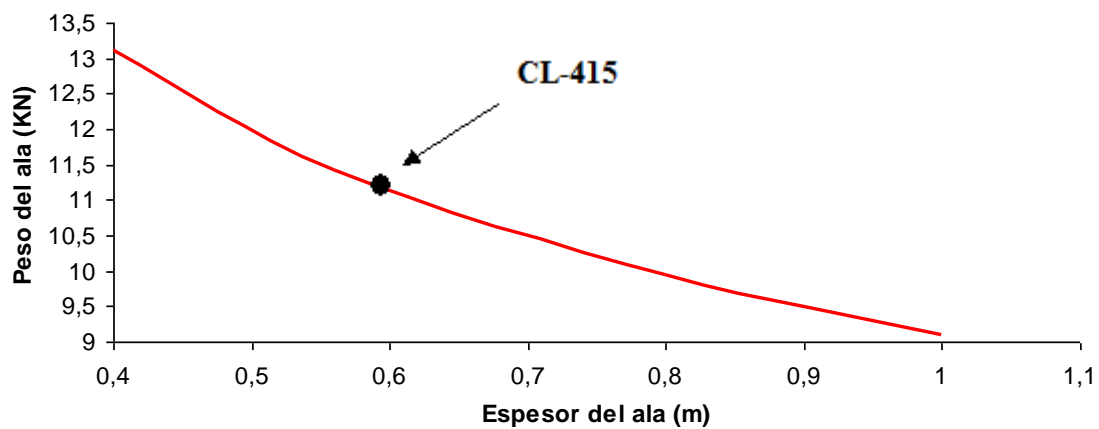


Figura 6.40: Relación entre el peso del ala y el espesor de la misma.

En este caso, a diferencia de cuando se representaba frente a la cuerda y a la envergadura sigue una distribución descendente, de manera que al aumentar el espesor del perfil disminuye el peso del ala. Este resultado no es el esperado. Observando la ecuación (2.2) se aprecia como el espesor del ala es inversamente proporcional al peso de la misma, por lo tanto se explica de este modo la distribución obtenida en la figura 6.40. Aún así es necesario explicar que esta relación descendente es debida a que la expresión con la que se calcula el peso del ala no es una fórmula física, sino experimental; por lo tanto no se puede tratar cada término por separado, sino la ecuación en conjunto. Para que una aeronave sea óptima para volar no se puede variar únicamente el espesor del ala, ya que esta modificación lleva asociado la variación de otros parámetros, como por ejemplo, el área de la superficie de control (S_{CSW}).

6.6. Discusión de resultados

6.6.1. Distancia frente al espesor del cajón de torsión

Para poder visualizar el nivel de influencia de cada parámetro en comparación con los demás se representan todos en una única gráfica. Al haber tanta diferencia de distancias entre los valores modificados de cada parámetro; por ejemplo, la envergadura se varía 14 metros y el espesor del ala 60 centímetros; se representan de forma adimensional a partir de la magnitud original de cada variable, de tal manera que todos los valores se encontrarán entre 0,5 y 2, estando el avión en estudio en el punto 1.

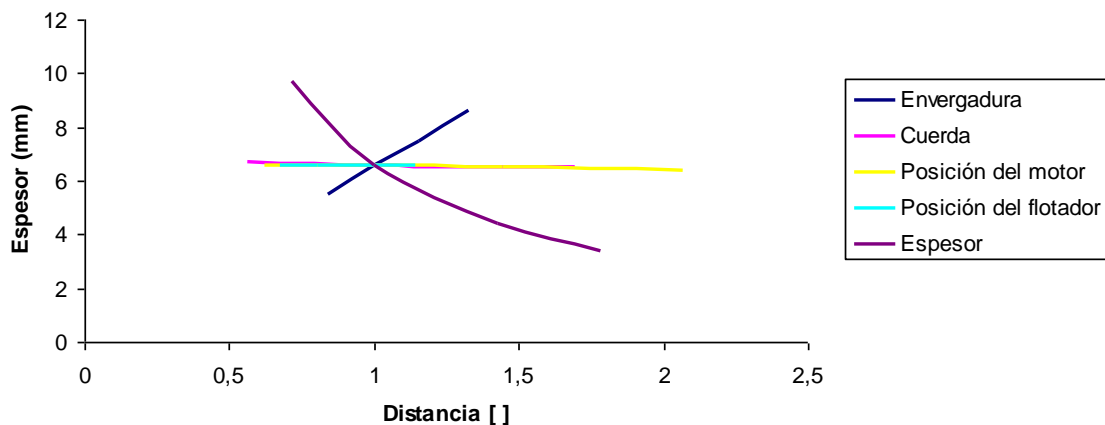


Figura 6.41: Relación del espesor del cajón de torsión con la distancia.

Si se observa la gráfica se aprecia que las variables que más influencia tienen en el diseño del cajón de torsión son el espesor del ala y la envergadura.

El espesor del cajón de torsión decae vertiginosamente al aumentar un poco el espesor del ala, esto es debido a que la restricción en altura del cajón de torsión viene dada por el espesor del perfil aerodinámico.

En segundo lugar, aumentar o disminuir la envergadura también produce secuelas considerables en el espesor del cajón de torsión, pero al contrario que con el espesor del ala, es necesario una variación en la magnitud mucho mayor por lo que el parámetro crítico es el espesor del ala.

Si se observa en la gráfica, la influencia en el espesor de la posición de los flotadores es prácticamente despreciable, pues su representación se mantiene constante; por ello, es la variable que menos influye en el proceso de diseño.

El comportamiento ante cambios en la posición del motor y en la cuerda es muy similar, bastante leve en ambos casos.

6.6.2. Distancia frente al espesor del cajón de torsión que necesitaría si únicamente soportara esfuerzos tangenciales

De la misma manera se representa también el espesor del cajón de torsión que necesitaría para soportar únicamente los esfuerzos tangenciales, figura 6.42. Como la posición de los motores y de los flotadores no influye no se expresan gráficamente.

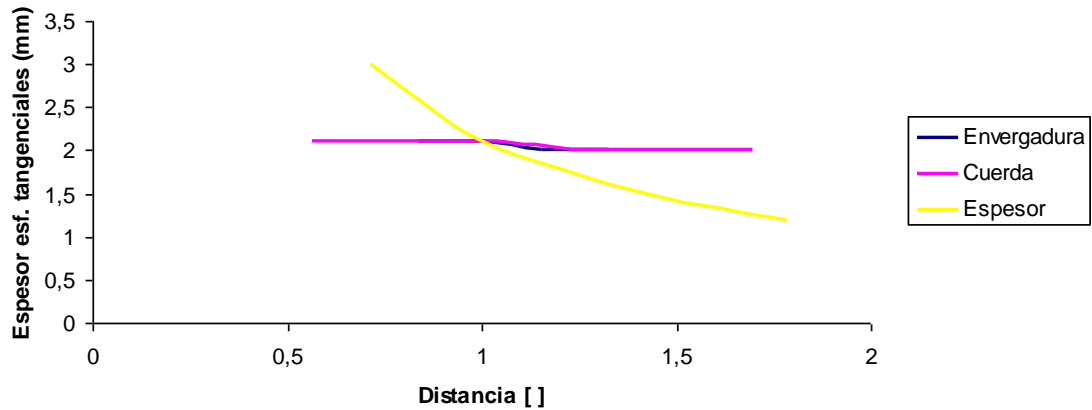


Figura 6.42: Relación del espesor del cajón de torsión que necesitaría para soportar únicamente esfuerzos tangenciales con la distancia.

Como ya se preveía la envergadura y la cuerda siguen distribuciones muy similares y prácticamente constantes, sólo varían un milímetro de espesor en el rango de 14 metros en el caso de la envergadura y 4 en el de la cuerda.

De nuevo, por las mismas razones que se han expuesto a continuación de la figura 6.41, el parámetro relevante es el espesor del ala.

6.631. Distancia frente al peso del ala

Por último se ilustra de igual forma las variaciones que sufre el peso del ala con la relación de distancias, figura 6.43

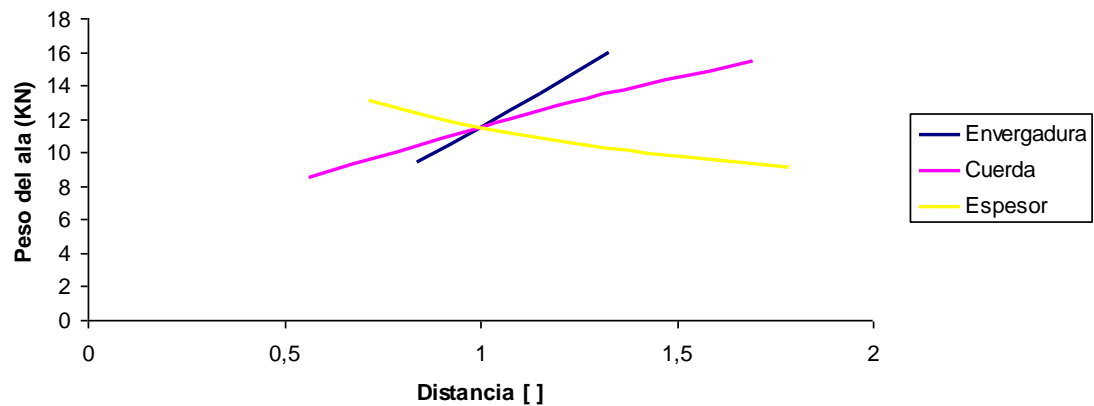


Figura 6.43: Relación del peso del ala con la distancia.

Como se aprecia el factor más agresivo sobre el peso de las alas es la envergadura. La cuerda necesita menor intervalo de distancia para experimentar una variación grande de peso mientras que un aumento en el espesor se traduce en un decremento del peso según el razonamiento expuesto en el punto 6.5.4.3.

7. Análisis numérico

7.1. Introducción

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas. Permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo o estructura, para ello se divide en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados elementos finitos. Dentro de los mismos se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Al conjunto de nodos se le conoce con el nombre de malla. Los cálculos se realizan sobre ésta última.

Típicamente si se trata de un problema de mecánica de medios continuos el método de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente. Además el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor y de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones (mecánica de fluidos computacional, CFD) o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia en la práctica ingenieril los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Dada la dificultad a la hora de encontrar una solución analítica de una geometría más compleja de la diseñada se recurre a los métodos numéricos, de tal forma que el método de los elementos finitos se convierte en la única alternativa práctica de cálculo. El software de elementos finitos elegido es el código comercial COSMOS en la configuración básica, el cual está disponible en las aulas informáticas de la Escuela Politécnica de la Universidad Carlos III de Madrid.

La estructura general a seguir consiste en primer lugar en la creación manual de la geometría, introducción de las propiedades del material a utilizar, mallado de la estructura, simulación del sistema de fuerzas y por último verificación de los resultados. El punto crítico del proceso es la creación de la malla, pues del tamaño y de la convergencia de los nodos de las paredes adyacentes depende la obtención de resultados de mayor o menor precisión.

El estudio en el programa COSMOS se plantea en varias fases, en una primera se calculará el estado tensional de un cajón de torsión similar al calculado de manera analítica para de este modo poder comparar los resultados obtenidos (figura 7.2). En

una segunda fase se afinará la geometría del cajón de torsión mediante la introducción de costillas que le otorgan rigidez al ala (figura 7.14). Por último, en una última fase se evoluciona la geometría con el fin de aproximarse al modelo real introduciendo el perfil aerodinámico del ala a la estructura (figura 7.21). La forma del perfil aerodinámico consta de tres superficies de geometrías diferentes: una triangular de 1,65 metros de ancho equivalente al borde de salida, una central rectangular de 1,14 metros de ancho que equivale al cajón de torsión y por último una superficie elíptica a modo de borde de ataque de 0,75 metros de ancho, figura 7.1.

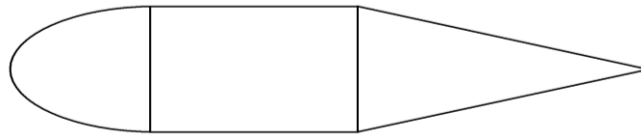


Figura 7.1 : Perfil aerodinámico del ala simulado en el modelo detallado.

7.2. Modelo simplificado 1

7.2.1. Modelo físico y dominio computacional

El problema a estudiar es el comportamiento que experimenta el ala del avión CL-415 cuando se encuentra en maniobra simétrica. Como prácticamente la totalidad de las fuerzas las soporta el cajón de torsión, es éste el elemento a diseñar con el programa de elementos finitos COSMOS.

En primera instancia se simulará el cajón de torsión como un tubo rectangular cerrado de dimensiones conocidas, 1,14 metros de ancho, 0,56 metros de altura y un espesor de 6,6 milímetros, figura 7.2.

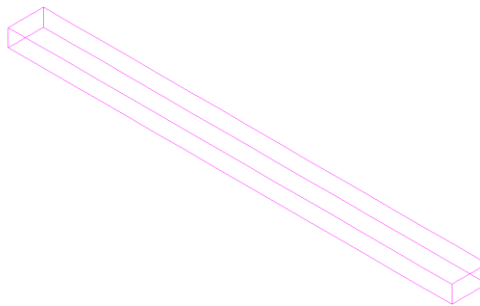


Figura 7.2: Cajón de torsión simulado en COSMOS.

Sobre él actúan las fuerzas explicadas y detalladas en el punto 2.2: el peso del motor, del ala, del flotador y la fuerza de sustentación.

7.2.2. Cargas y condiciones de contorno

Dado que el avión es una estructura simétrica se simplifica calculando únicamente una de las dos alas. La unión ala-avión se modela mediante un empotramiento, impidiendo el movimiento y giro en cualquier dirección. Al tratarse del modelo simplificado, es la superficie 1 la que se somete a las restricciones de movimiento, rotación y traslación, figura 7.3.

En la figura 7.3 se muestra el dominio del software sobre el que se realiza la simulación. El motivo de la existencia de un número tan elevado de superficies viene dado por las condiciones de carga que se programan para simular las condiciones reales.

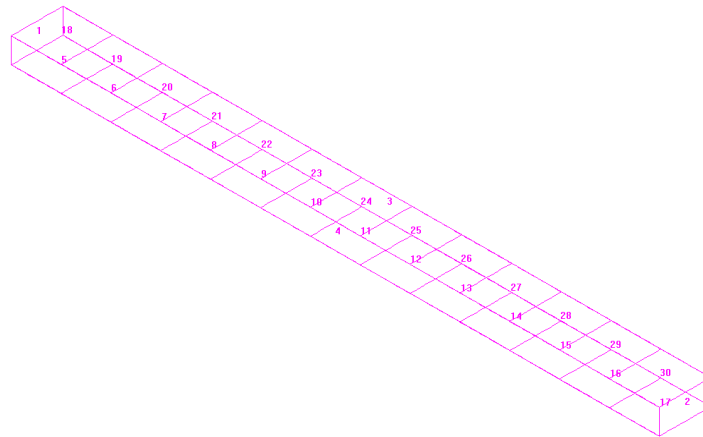


Figura 7.3: División de la estructura en estudio en superficies, modelo simplificado 1.

El programa de elementos finitos COSMOS permite introducir las fuerzas distribuidas de diversas maneras. De este modo, es posible programar presiones aplicadas sobre superficies, fuerzas distribuidas sobre curvas y cargas puntuales aplicadas sobre puntos o nodos.

El peso del motor y del flotador se consideran cargas puntuales aplicadas en el centro geométrico de los mismos. El flotador al estar colgado del ala se ubicará en la cara inferior del cajón mientras que el motor se posicionará en la cara superior, por encontrarse encima del ala. Para que todas las superficies soporten de igual manera el peso del ala, se considerará como una carga puntual presente en todos los nodos de la estructura.

La fuerza de sustentación se estimará como una presión aplicada en las caras inferior y superior del cajón. El código COSMOS no permite introducir las cargas mediante funciones definidas por el usuario; por ello, la fuerza de sustentación se aproximará a trece cargas uniformemente distribuidas de la siguiente manera, figura 7.4.

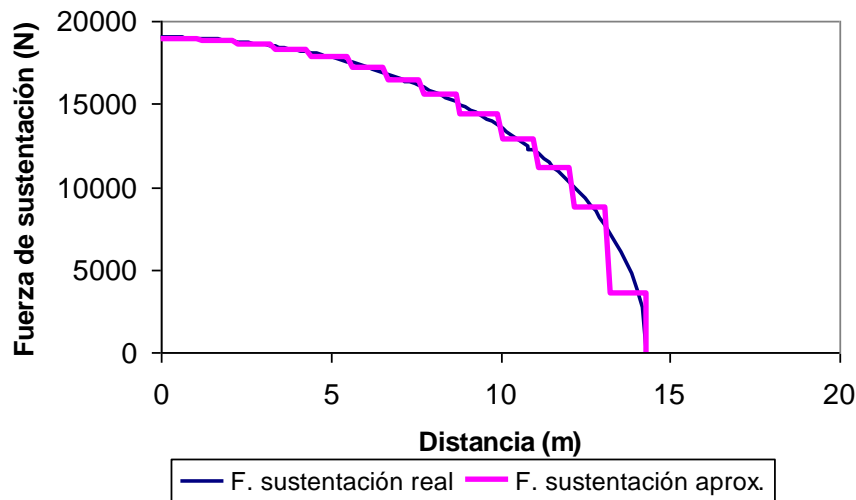


Figura 7.4: Comparación de la fuerza de sustentación real frente a la aproximada introducida en el programa COSMOS.

La fuerza de sustentación aproximada se calcula obteniendo la fuerza de sustentación real en cada uno de los trece puntos en los cuales se ha dividido el ala del avión y realizando la media de los puntos contiguos, tabla 7.1. Para convertirla en unidades de presión se divide por el ancho del cajón de torsión, tabla 7.2. Como última transformación, se divide el resultado entre dos para poder aplicarla en las caras superior e inferior del cajón.

Distancia desde empotramiento (m)	Fuerza de sustentación (N/m)
0	21663,44
1,10	21602,93
2,20	21406,26
3,30	21073,44
4,41	20619,60
5,51	19999,35
6,61	19212,69
7,71	18259,62
8,81	17079,62
9,91	15627,33
11,02	13842,21
12,12	11542,74
13,21	8335,58
14,32	0

Tabla 7.1: Fuerza de sustentación en cada uno de los trece puntos.

Puntos contiguos	Fuerza de sustentación media (N/m)	Fuerza de sustentación media (Pa)	Fuerza de sustentación aplicada en cada superficie (Pa)
0-1,10	21633,18	18976,47	9488,24
1,10-2,20	21504,59	18863,68	9431,84
2,20-3,30	21239,85	18631,45	9315,73
3,30-4,41	20846,52	18286,42	9143,21
4,41-5,51	20309,47	17815,32	8907,66
5,51-6,61	19606,02	17198,26	8599,13
6,61-7,71	18736,15	16435,22	8217,61
7,71-8,81	17669,62	15499,67	7749,84
8,81-9,91	16353,48	14345,16	7172,58
9,91-11,02	14734,44	12925,24	6462,62
11,02-12,12	12692,48	11133,75	5566,88
12,12-13,21	9939,16	8718,56	4359,28
13,21-14,32	4167,79	3655,96	1827,98

Tabla 7.2: Fuerza de sustentación media.

7.2.3. Mallado del dominio computacional

Las pruebas iniciales realizadas mostraron que los resultados obtenidos se aproximan más a los resultados analíticos cuando la malla que sirve de soporte a la simulación es simétrica. Por ello, las superficies del perfil se diseñan de tal modo que todas ellas tengan el mismo tamaño de celda de malla. Para ello, y debido a que el mallado sobre superficies se realiza mediante la definición del número de nodos, es necesario determinar la relación de áreas cada vez que se haga la probatura de cada tipo de mallado. Por otro lado, el programa ofrece la posibilidad de realizar un ajuste sobre aquellos nodos que no mantengan la separación necesaria con los nodos adyacentes. Por defecto, la tolerancia que establece el programa es de 10^{-4} m pero en la realización de este proyecto se emplea una tolerancia de 10^{-2} m para evitar la divergencia entre las superficies laterales y las superficies superior e inferior. Esto se debe a que las dimensiones del problema son elevadas y una tolerancia del orden de décimas de milímetro es demasiado pequeña.

El mallado se realiza con elementos Shell 3, triangulares de pared delgada que permiten la flexión en el análisis de modelos estructurales y térmicos de tres dimensiones, figura 7.4. En cálculos estructurales poseen seis grados de libertad por nodo, tres de traslación y tres de rotación. En modelos térmicos únicamente poseen un grado de libertad por nodo, lo cual representa la temperatura.

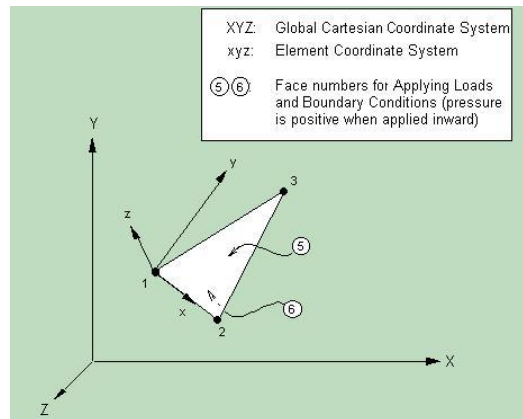


Figura 7.5: Imagen de un elemento tipo SHELL 3.

Para encontrar la configuración óptima, es decir el número de elementos precisos con el cual la simulación obtiene los resultados más próximos a los reales es necesario realizar varias pruebas; a continuación en la figura 7.6 se muestran las combinaciones calculadas para este caso representando la tensión máxima frente al número de nodos totales.

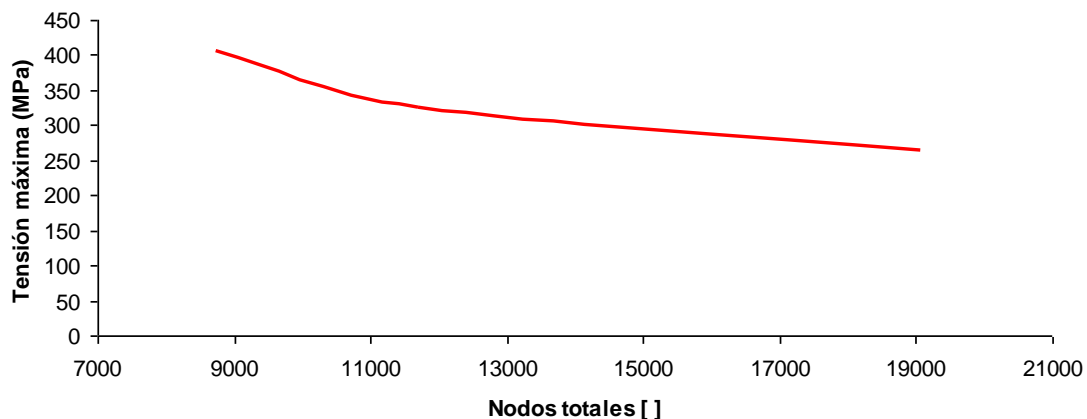


Figura 7.6: Relación de la tensión máxima del cajón en el modelo simplificado frente al número de nodos totales.

Observando la tendencia que siguen los resultados, se puede afirmar que cuanto mayor es el número de nodos mejor es el modelo de simulación ya que los resultados se aproximan más a los del método analítico. Sin embargo, y con vistas a las siguientes fases del proyecto, no se aprovecha el número total de nodos disponibles, sino que se establece en 30000 nodos totales, para reservar 10000 nodos a las nuevas superficies que se incluyen en los modelos más avanzados. Por ello, se escoge la opción de 19066 elementos, cuyo mallado se muestra a continuación (figura 7.7). Se incluye también un zoom del extremo libre del cajón de torsión para facilitar la visualización (figura 7.8).

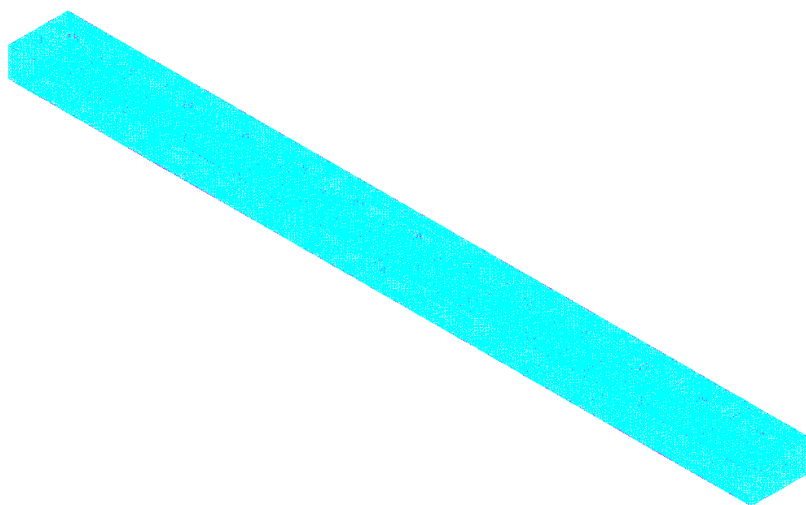


Figura 7.7: Mallado de la estructura en estudio.

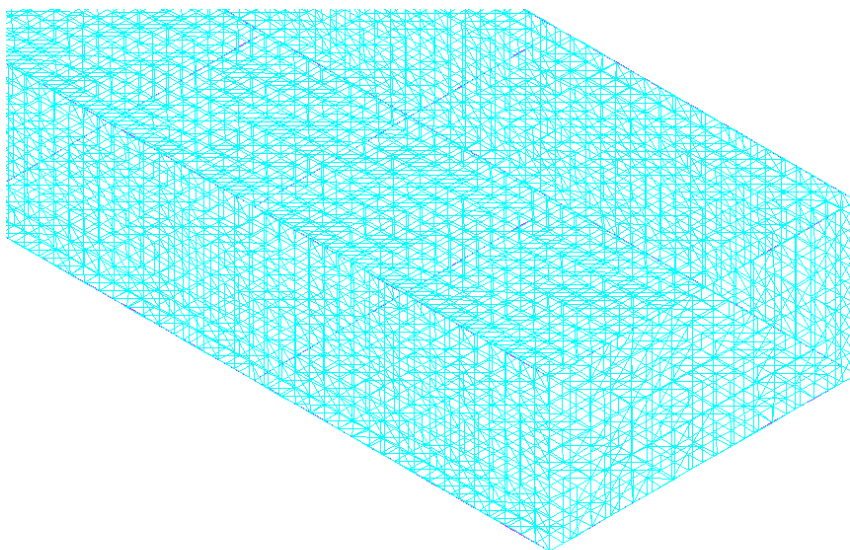


Figura 7.8: Zoom del mallado del modelo simplificado 1.

7.2.4. Resultados del modelo simplificado 1.

Para finalizar la simulación y validar los resultados se obtienen las gráficas de las tensiones de Von Mises, las tensiones normales en dirección X y por último, dos vistas de la deformada ocasionada, figuras de la 7.9 a la 7.12.

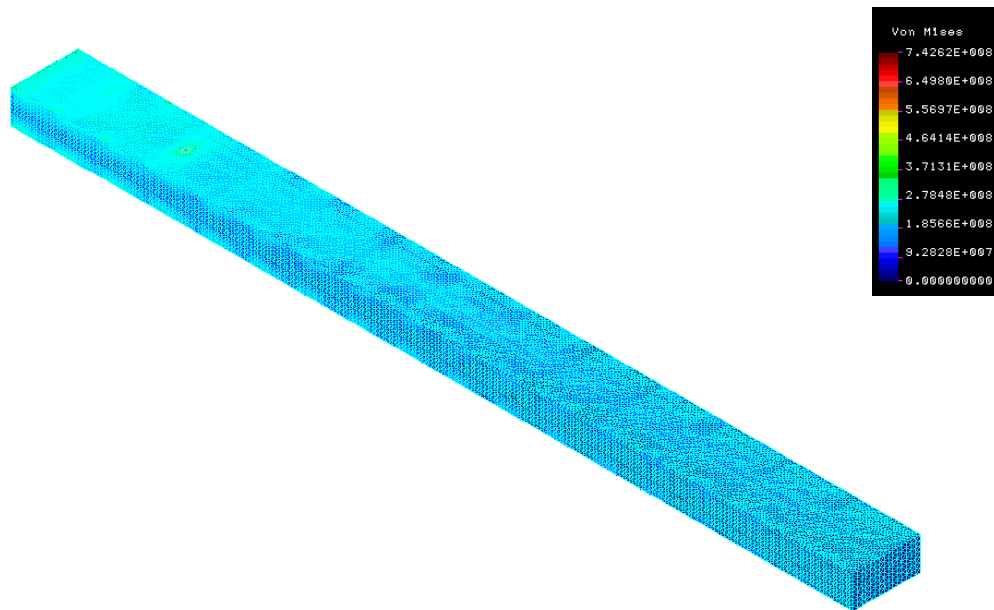


Figura 7.9: Campo de tensiones de Von Mises del modelo simplificado 1.

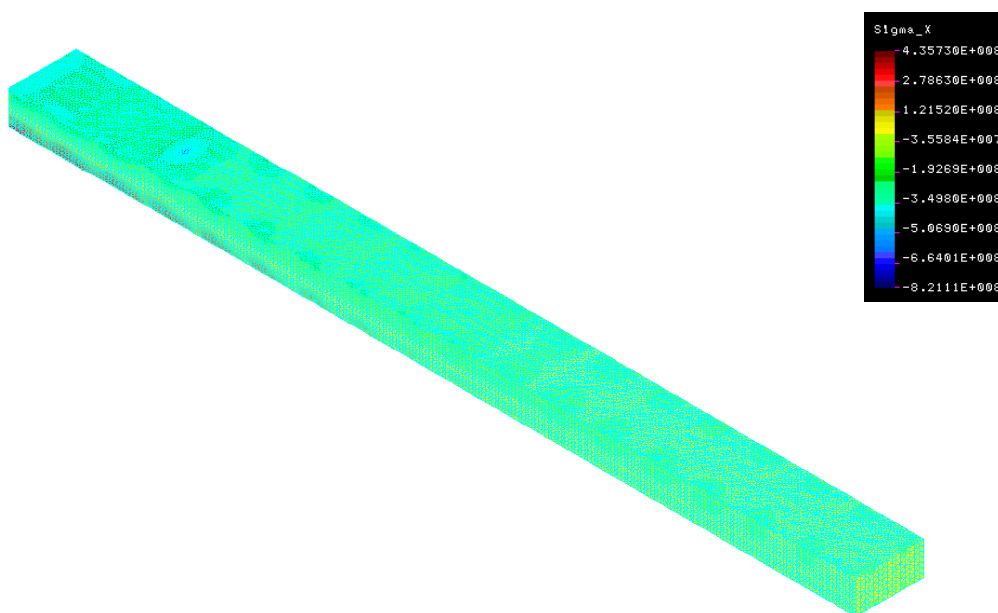


Figura 7.10: Campo de tensiones normales en dirección del eje X del modelo simplificado 1.

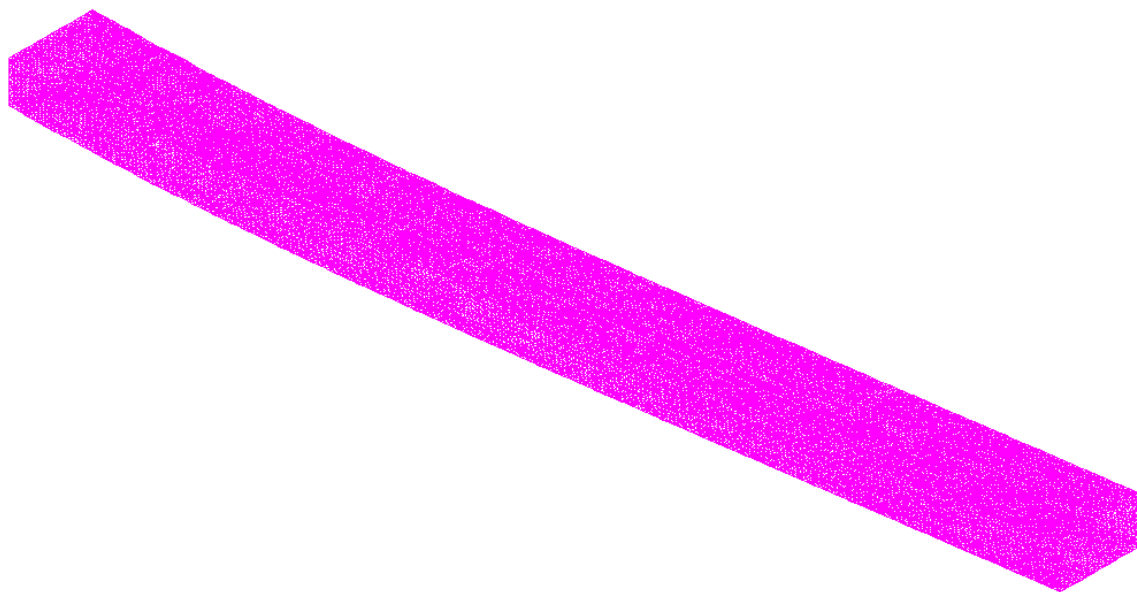


Figura 7.11: Deformada del modelo simplificado 1.



Figura 7.12: Vista lateral de la deformada del modelo simplificado 1.

La zona crítica de diseño, donde se obtienen las tensiones máximas es donde se encuentra el empotramiento. Al ser la fuerza dominante la correspondiente a la sustentación, la cara superior, correspondiente a las superficies 18-30, se encuentra sometida a compresión y la inferior, superficies 5-17, a tracción. En la figura 7.10 al mostrarse las tensiones normales en la dirección X se aprecia claramente este comportamiento, encontrándose las tensiones máximas en la cara inferior. El punto aislado de tensión encontrado en la cara superior del cajón (figura 7.9 y figura 7.10) corresponde a la carga puntual que simula el peso del motor.

Por otro lado la deformada sigue el comportamiento esperado, con un desplazamiento máximo en sentido del eje Y positivo de 0,64 metros.

A continuación, denominando a los vértices del cajón como en la figura 7.13 se obtienen las tensiones en los cuatro extremos del empotramiento, y los desplazamientos en los cuatro vértices del extremo libre.

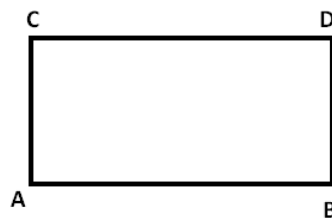


Figura 7.13: Sección genérica del cajón de torsión.

Puntos	Tensión (MPa)	Desplazamiento vertical (m)
A	264,9	0,6431
B	231,4	0,6431
C	-354,3	0,6431
D	-311,7	0,6431

Tabla 7.3: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la sección, modelo simplificado 1.

El signo negativo indica que son tensiones sometidas a estados de compresión y el positivo a tracción. El estado crítico, el que interesa en estudio, es el caso a tracción, por ello la tensión mayor se produce en el punto A.

Comparando la tensión máxima con la calculada en el modelo analítico, 264,9 frente a 273,24, se observa que se produce un error de aproximadamente el 3%; lo cual es bastante permisible teniendo en cuenta que en la aproximación de la fuerza de sustentación ya se comete un error de aproximadamente un 10%.

Teóricamente las tensiones máximas se producen en los extremos del empotramiento, pero en este caso existe un punto atípico, el nodo más próximo al punto A posee una tensión mayor, $3,24 \cdot 10^8 Pa$. Este valor no interesa estudiarlo pues es fruto de un momento torsor que aparece debido al mal posicionamiento de las cargas puntuales correspondientes al peso del motor y del flotador. Al ser necesario aplicar las cargas puntuales sobre nodos se procura ubicarlas en los más cercanos pero es inevitable que se alejan de la fibra neutra causando de este modo un momento torsor que retuerce la estructura provocando puntos anómalos como el explicado recientemente.

El desplazamiento vertical de los puntos de la estructura se mantiene invariante a la aparición del momento torsor; por ello los valores en los cuatro puntos son iguales y ronda lo esperado, 0,64 metros.

7.3. Modelo simplificado 2

7.3.1. Modelo físico y dominio computacional

En este caso se parte del modelo simplificado 1, figura 7.3 y se le añaden doce superficies transversales que simulan costillas a modo de refuerzos. La posición de las costillas es obtenida del cutaway, figura 5.2. Tanto el espesor de las superficies transversales como el material es el mismo que el del resto de superficies.

7.3.2. Cargas y condiciones de contorno

Las condiciones operativas son similares al modelo descrito en el punto anterior con la diferencia que en esta ocasión, al existir mayor número de superficies, figura 7.14, el peso del ala se reparte entre un mayor número de nodos, por lo que será necesario aplicar una fuerza menor en cada uno de ellos.

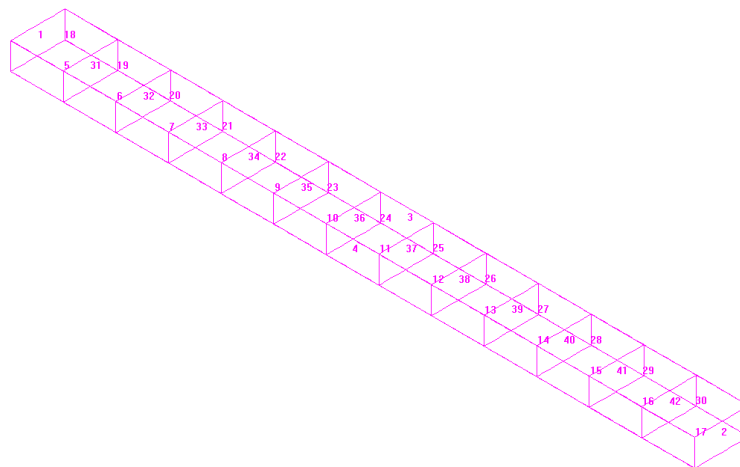


Figura 7.14: Superficies del modelo simplificado 2.

7.3.3. Mallado del dominio computacional

El mallado se realiza con el mismo elemento, Shell 3, y aplicando la misma relación de proporcionalidad que la usada en el punto 7.2.3. El número total de nodos es 20602, representados a continuación, figura 7.15. A continuación se muestra un zoom del extremo libre, figura 7.16.

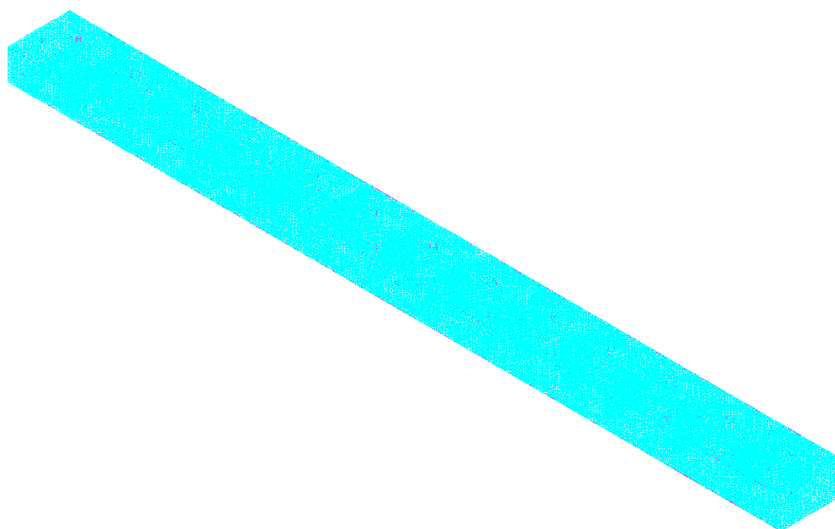


Figura 7.15: Mallado de la estructura en estudio, modelo simplificado 2.

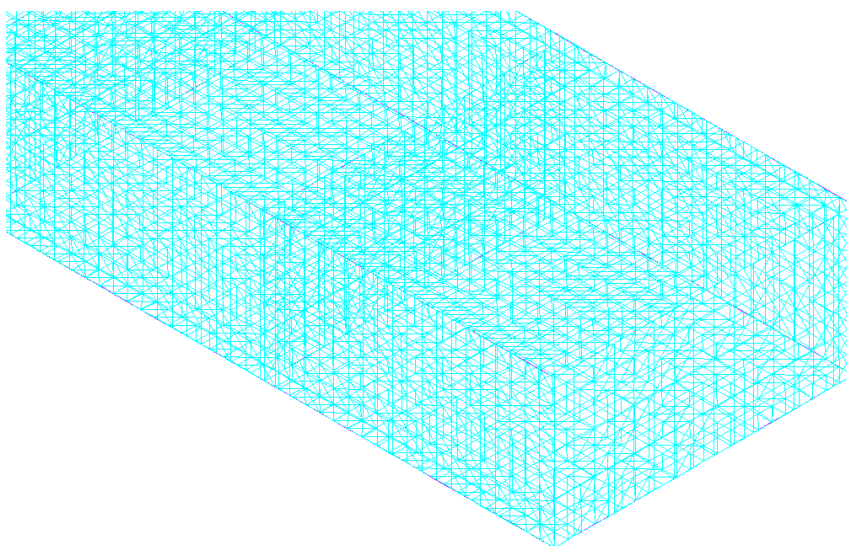


Figura 7.16: Zoom del Mallado del modelo simplificado 2.

7.3.4. Resultados del modelo simplificado 2.

Para finalizar la simulación y validar los resultados se obtienen las gráficas de las tensiones de Von Mises, las tensiones normales en dirección X y por último dos vistas de la deformada ocasionada, figuras desde la 7.17 a la 7.20.

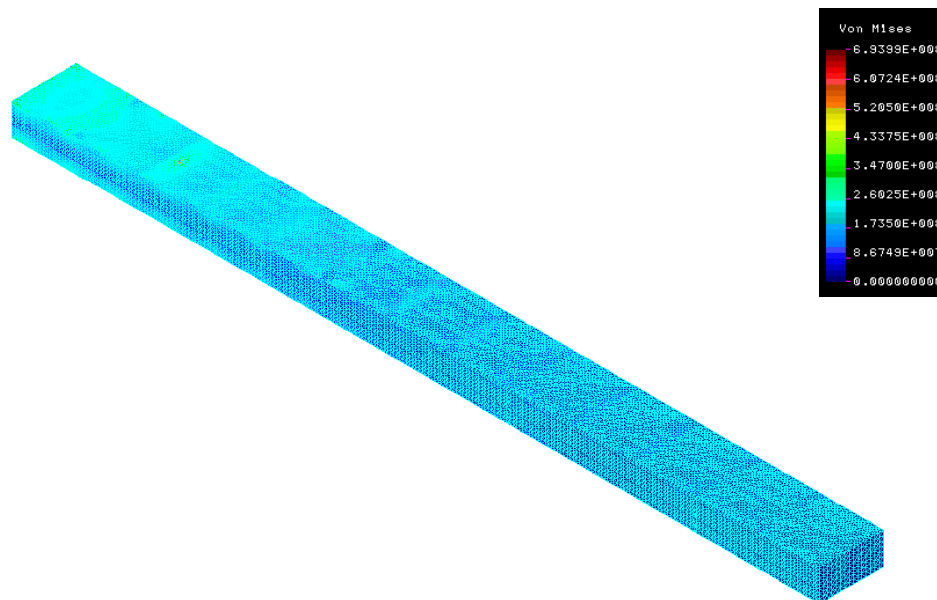


Figura 7.17: Campo de tensiones de Von Mises del modelo simplificado 2.

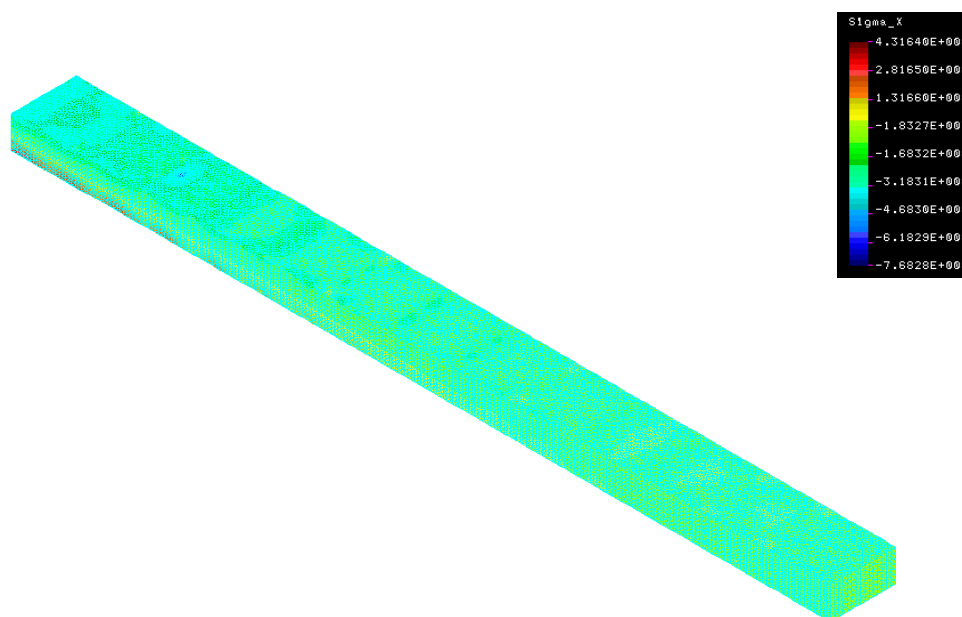


Figura 7.18: Campo de tensiones normales en dirección del eje X del modelo simplificado 2.

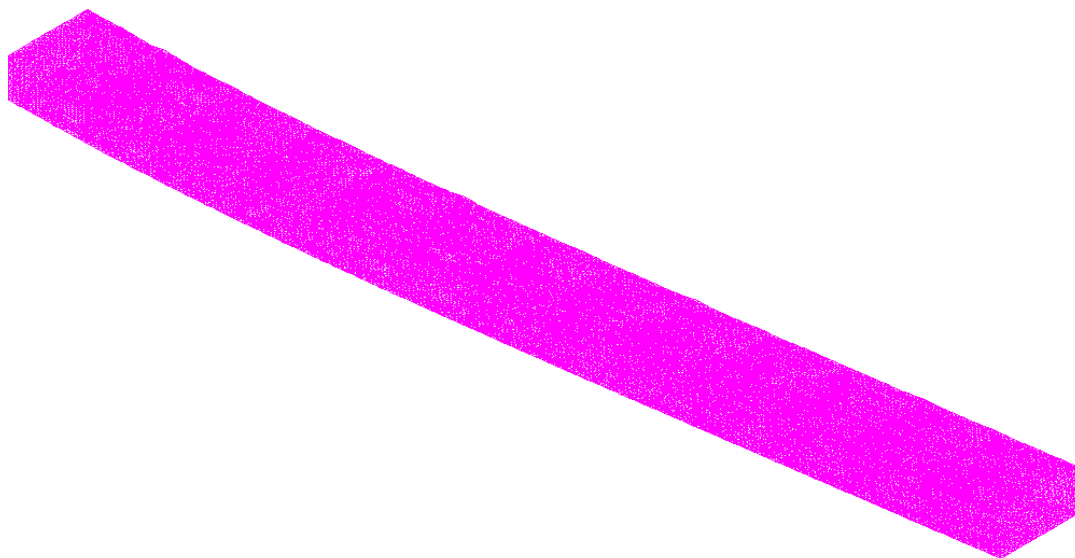


Figura 7.19: Planta de la deformada del modelo simplificado 2.



Figura 7.20: Vista lateral de la deformada del modelo simplificado 2.

Siguiendo la misma denominación de los vértices del cajón como en la figura 7.13 se obtienen las tensiones en los cuatro extremos del empotramiento, y los desplazamientos en los cuatro vértices del extremo libre.

Puntos	Tensión (MPa)	Desplazamiento vertical (m)
A	261,5	0,6403
B	227,6	0,6403
C	-129,4	0,6403
D	-305,21	0,6403

Tabla 7.4: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la sección del modelo simplificado 2.

El error del modelo simplificado 2 aumenta con respecto al modelo simplificado 1, pasa de un 3% a un 4%. Esto es debido a que en el modelo analítico no existen las costillas, por ello no son comparables.

Como las cargas puntuales debidas al peso del motor y del flotador se siguen colocando sobre nodos, en este modelo de nuevo aparecen puntos anómalos.

Por último se debe mencionar que como ocurre en el modelo simplificado 1, la estructura se mantiene rígida al momento torsor aparecido, obteniéndose los mismos resultados en los cuatro puntos del extremo libre del cajón de torsión.

7.4. Modelo detallado

7.4.1. Modelo físico y dominio computacional

El propósito del modelo detallado es aproximar el modelo computacional a la geometría real del perfil del ala del avión. Se parte del cajón de torsión ya diseñado en el modelo simplificado 2, figura 7.14 y se incorporan dos superficies que hacen las veces de borde de ataque y borde de salida, figura 7.1. El borde de ataque se modela mediante la proyección de una semielipse de 0,75 metros de eje mayor y 0,56 metros de eje menor (correspondiente con la altura del cajón de torsión). La geometría del borde de salida se simplifica a una sección triangular isósceles de 1,65 metros de longitud. Las costillas de refuerzo también amplían su superficie, cubriendo de este modo el espacio creado por los bordes de ataque y salida. Tanto el tipo de material como el espesor de las nuevas superficies sigue siendo el mismo, aluminio 7075 de 6,6 mm de espesor. El estado de cargas que actúa sobre el nuevo perfil se mantiene constante con respecto a los anteriores modelos.

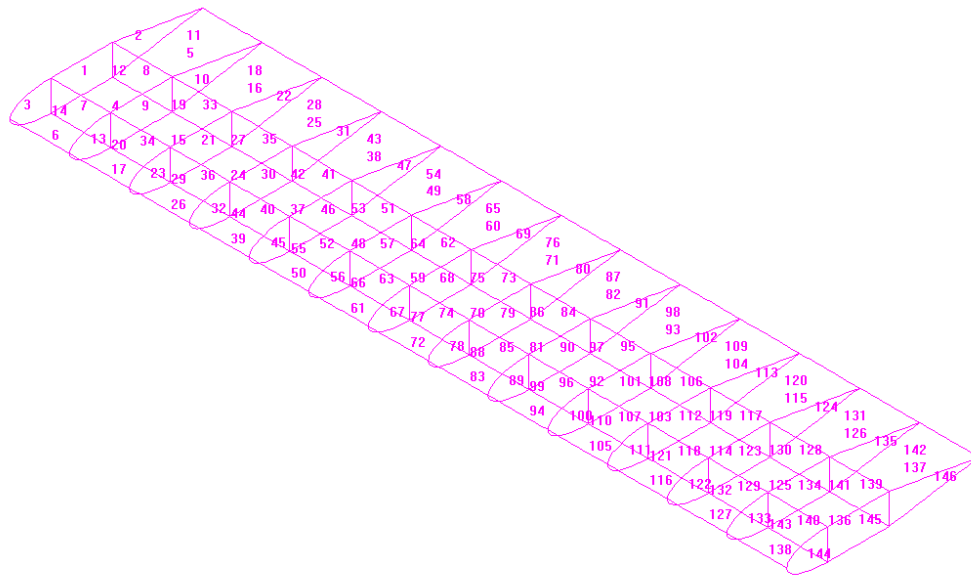


Figura 7.21: Perfil del ala simulado en COSMOS, dividido en superficies

7.4.2. Cargas y condiciones de contorno

Para el modelo detallado también son válidas las simplificaciones aplicadas a los modelos anteriores, punto 7.2.2 con la diferencia que en esta situación no sólo se le restringe el movimiento a la superficie 1, sino también a las dos siguientes, figura 7.21.

Las fuerzas se aplican de la misma manera. Al aumentar el número de superficies es necesario modificar los valores de la fuerza de sustentación calculada. En la tabla 7.5 se muestra en primer y segundo lugar para cada una de las trece superficies en las que se ha dividido el perfil la fuerza de sustentación media en unidades de fuerza por unidad de longitud y de presión. Al repartirse en las superficies inferior y superior, en la última columna se expone la presión que hay que introducir en el programa de elementos finitos COSMOS.

Puntos contiguos	Fuerza de sustentación media (N/m)	Fuerza de sustentación media (Pa)	Fuerza de sustentación aplicada en cada superficie (Pa)
0-1,10	21633,18	6889,54	3444,77
1,10-2,20	21504,59	6074,74	3037,37
2,20-3,30	21239,85	5999,96	2999,98
3,30-4,41	20846,52	5888,84	2944,42
4,41-5,51	20309,47	5737,14	2868,57
5,51-6,61	19606,02	5538,42	2769,21
6,61-7,71	18736,15	5292,70	2646,35
7,71-8,81	17669,62	4991,42	2495,71
8,81-9,91	16353,48	4619,63	2309,81
9,91-11,02	14734,44	4162,36	2081,19
11,02-12,12	12692,48	3585,45	1792,72
12,12-13,21	9939,16	2807,67	1403,84
13,21-14,32	4167,79	1177,34	588,67

Tabla 7.5: Fuerza de sustentación media para el modelo detallado.

Los valores de la fuerza de sustentación se reducen drásticamente, esto es debido a que en esta ocasión para poder aplicarla como una presión es necesario dividir la magnitud entre el ancho del perfil; es decir, la cuerda. Al ser la cuerda aproximadamente tres veces el ancho del cajón explica el porqué de estos resultados.

7.4.3. Mallado del dominio computacional

El punto más crítico del proceso de diseño es el mallado, por lo tanto es fundamental elegir el tipo de malla. Como se aprecia en la figura 7.21, coexisten superficies de diferentes tamaño, por ello es necesario estimar mediante relaciones de proporcionalidad el número de celdas en cada superficie. Para obtener resultados fiables es imprescindible un mallado con alto número de elementos. Se escoge una malla de 22994 nodos puesto que si es mayor puede dar problemas debida a la configuración básica del programa COSMOS utilizado. El tipo de elemento utilizado se mantiene invariante con respecto a los modelos simplificados, el Shell3. A continuación se muestra la estructura mallada y un zoom del extremo libre, figura 7.22 y 7.23.

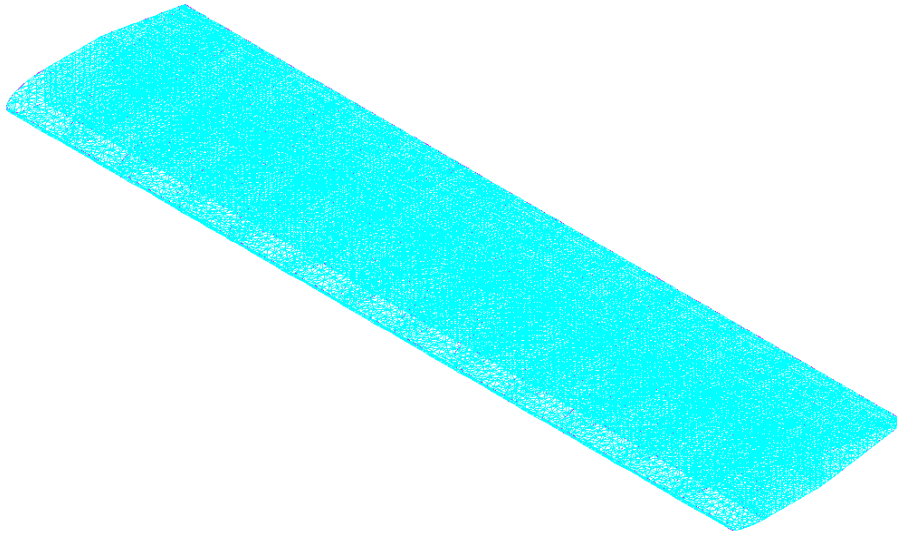


Figura 7.22: Mallado del modelo detallado.

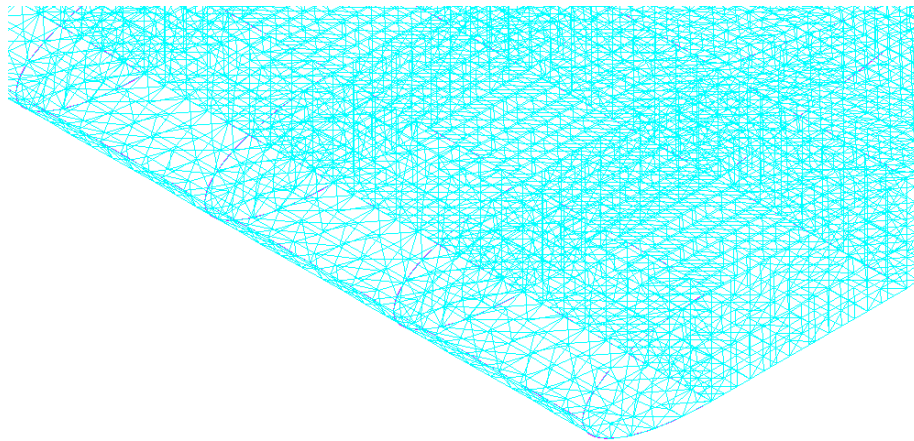


Figura 7.23: Zoom del mallado del modelo detallado.

7.4.4. Resultados del modelo detallado

Siguiendo las pautas establecidas para finalizar la simulación y validar los resultados se extrae el valor de las tensiones de Von Mises, las tensiones normales en dirección X y por último dos vistas de la deformada ocasionada, figuras desde la 7.24 a la 7.27 respectivamente.

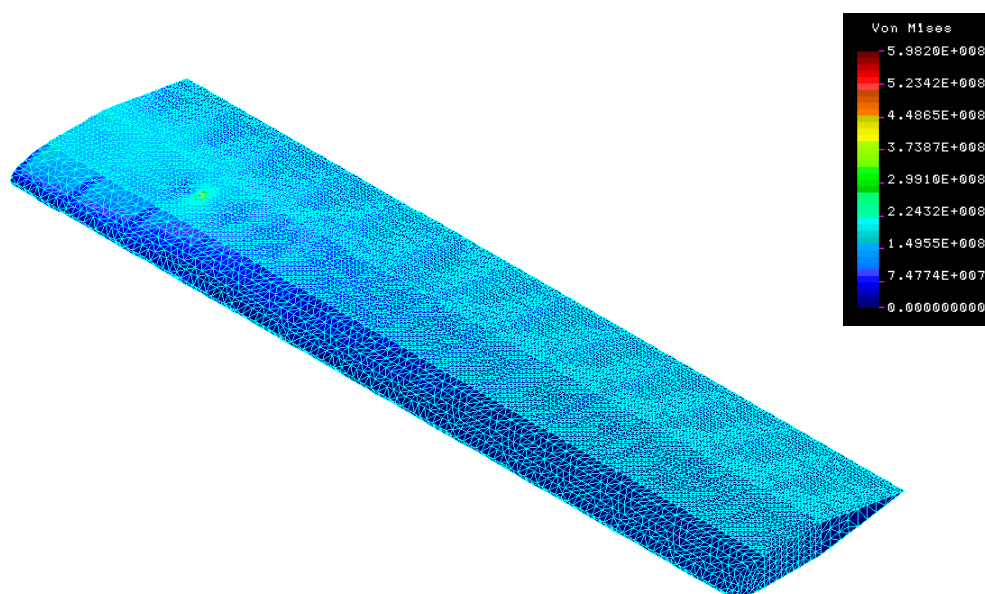


Figura 7.24: Campo de tensiones de Von Mises del modelo detallado.

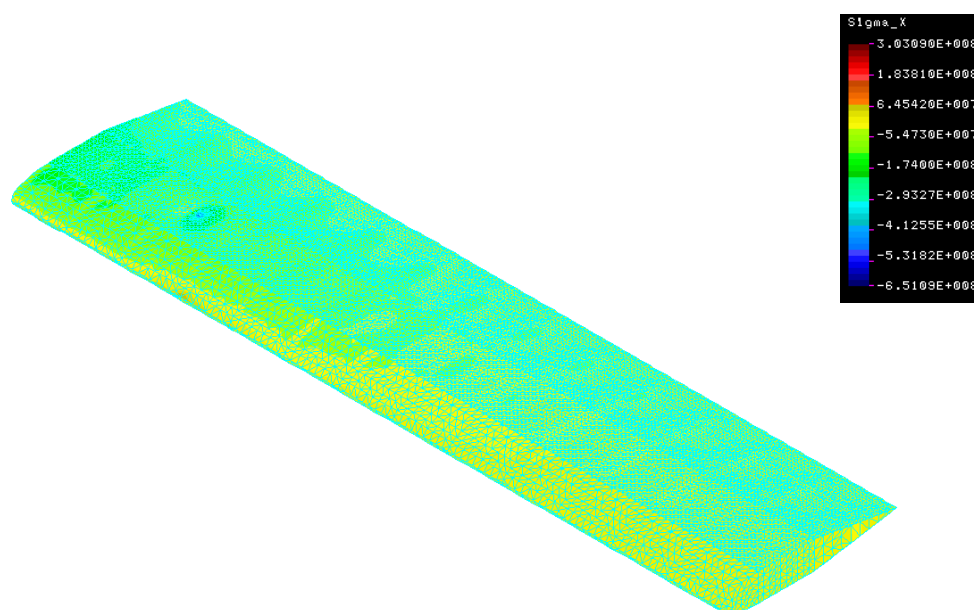


Figura 7.25: Campo de tensiones normales en sentido del eje X del modelo detallado.

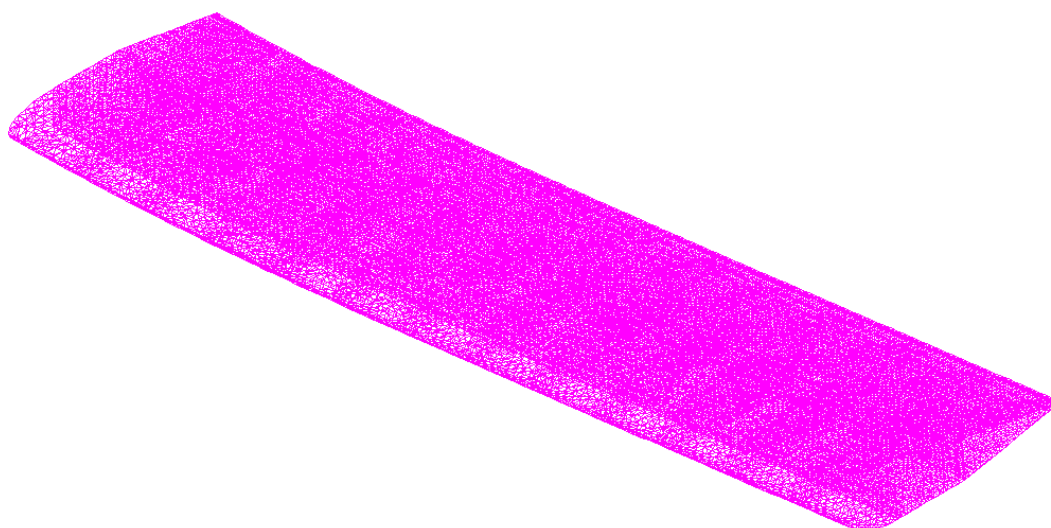


Figura 7.26: Deformada del modelo detallado.



Figura 7.27: Vista lateral de la deformada del modelo detallado.

Al mantenerse constantes las solicitaciones del problema en estudio la zona crítica de diseño sigue siendo el empotramiento, la cara superior se encuentra sometida a compresión y la inferior a tracción por lo que de nuevo las tensiones críticas se obtienen en la zona del empotramiento de la cara inferior, figura 7.25.

A continuación siguiendo el orden establecido y sabiendo que las tensiones de signo positivo son las sometidas a esfuerzos de tracción se muestran las tensiones obtenidas en los cuatro extremos del empotramiento y los desplazamientos verticales de los cuatro puntos del extremo libre.

Puntos	Tensión (MPa)	Desplazamiento vertical (m)
A	81,06	0,3710
B	64,92	0,3742
C	-91,79	0,3710
D	-155,4	0,3742

Tabla 7.6: Tensión y desplazamiento vertical en los cuatro vértices de la sección del modelo detallado.

Los resultados conseguidos con este modelo no son comparables con los anteriores, pues son modelos diferentes, con geometrías diferentes y por lo tanto, fuerzas aplicadas con magnitudes de diferente valor.

Era de esperar que, al repartir la fuerza de sustentación sobre una mayor superficie, disminuyera la tensión máxima alcanzada, de nuevo localizada en el punto A; y que el desplazamiento vertical máximo se redujera, pues desciende desde 0,64 metros a 0,40 metros.

7.5. Discusión de resultados

El siguiente cuadro, tabla 7.6, muestra los resultados obtenidos de manera computacional según el modelo empleado. Se incluyen los valores de tensión máxima en los puntos A, B, C y D correspondientes con los vértices del cajón (7.13). Se acompaña esta información con el desplazamiento vertical de dichos puntos.

	Modelo simplificado 1	Modelo simplificado 2	Modelo detallado
Nº de nodos empleados	19066	20602	22994
Tensión máxima (punto A) (MPa)	264,9	261,5	81,06
Tensión en el punto B (MPa)	231,4	227,6	64,92
Tensión en el punto C (MPa)	-354,3	-129,4	-91,79
Tensión en el punto D (MPa)	-311,7	-305,21	-155,4
Desplaz. Vertical en el punto A	0,6431	0,6403	0,3710
Desplaz. vertical en el punto B (m)	0,6431	0,6403	0,3742
Desplaz. vertical en el punto C(m)	0,6431	0,6403	0,3710
Desplaz. Vertical en el punto D (m)	0,6431	0,6403	0,3742

Tabla 7.7: Resultados obtenidos en el programa de simulación COSMOS.

Como se esperaba las tensiones producidas en el modelo detallado son muy inferiores a las ocasionadas en los dos métodos simplificados. Esto es debido a que en el detallado se reparten las mismas cargas sobre una superficie mayor, lo que ocasiona que éstas se reduzcan. Como consecuencia del estado tensional, las deformaciones también son menores en el modelo detallado.

Aunque el desplazamiento vertical de los cuatro puntos correspondientes al extremo libre de los modelos simplificados sea la misma, en el modelo detallado varía levemente; esto es debido a que la estructura diseñada en el modelo detallado ya no es simétrica, pues en un extremo se encuentra una superficie triangular y en el otro semiéptica.



7.6. Mejora de los resultados

Debido a la complejidad existente en la resolución de los modelos analíticos se ha llevado a cabo la simplificación del problema al abordar el método de unión del ala con el avión, la distribución de las cargas y la geometría del cajón de torsión. De haber contado con más medios se podría haber realizado un planteamiento más realista del modelo, pero dadas las dimensiones de un proyecto de estas características no se pudo llevar a cabo dicho planteamiento.

Para disminuir el error producido en el modelo computacional en primer lugar se debería usar una configuración más avanzado del software utilizado, pues se dispondría de un rango mayor de posibilidades a la hora de definir las condiciones de contorno. De este modo se podría simular la unión del ala al cuerpo del avión de forma más realista o definir la fuerza de sustentación mediante la creación de funciones a implementar en el código fuente del programa pues, como ya se comentó, al introducir en el programa la fuerza de sustentación mediante trece funciones constantes continuas se crea un error del 10% con respecto a la curva real.

Otro punto importante a tener en cuenta es la realización del mallado. Optimizando el tamaño de la malla en busca de lograr el máximo número de nodos y la perfecta convergencia de las superficies se puede reducir la desviación en los resultados obtenidos pues, pese a haber procurado lograr estos propósitos, cabe la posibilidad de afinar más el mallado del modelo.

Por último, para evitar resultados erróneos deberían coincidir la ubicación del peso del motor y del flotador con un nodo; de esta forma se evitaría aproximarlos y por lo tanto dejaría de existir el momento torsor causante de puntos anómalos.



8. Conclusiones y trabajos futuros

8.1. Conclusiones

A la vista de los resultados, la influencia del flotador sobre el cálculo de tensiones resulta despreciable frente a las otras solicitaciones. Por este motivo no es relevante el caso de que el avión seleccionado sea un hidroavión.

Se ha comprobado como cuando el avión se encuentra realizando una maniobra simétrica se produce mayor estado tensional sobre la estructura que el causado si se encuentra en vuelo nivelado; por ello será suficiente con realizar el estudio tensional para el primer tipo de condiciones de vuelo para futuros trabajos.

Como era de esperar el punto crítico ha resultado ser el empotramiento; es decir, la unión del ala con el avión en sí. Es por tanto que la determinación del espesor del cajón de torsión está condicionado por las tensiones dadas en este punto. Además se ha comprobado que las tensiones normales producidas por el momento flector provocado por el estado de cargas son un 88% mayor que las tangenciales, siendo por tanto las que marcan las condiciones de diseño.

Según el estudio paramétrico realizado, el espesor del cajón de torsión aumenta linealmente cuando aumenta la envergadura. Cuando los parámetros variantes son la cuerda, la posición de los motores y de los flotadores medidos desde la unión del ala con el avión, el espesor se comporta de modo opuesto, disminuyendo al aumentar los mismos de una manera aproximadamente lineal. Por último, al aumentar el espesor del ala el espesor del cajón de torsión también disminuye, pero en esta ocasión de manera parabólica. Al representarse todas las variables en una única gráfica se observa que los parámetros que más influencia tienen sobre el diseño del cajón de torsión son el espesor del ala y la envergadura.

8.2. Trabajos futuros

Este trabajo supone un punto de partida en el estudio del estado tensional del ala de un avión. Por tanto existen numerosas vías para seguir el análisis realizado. Un primer paso sería mejorar la geometría del cajón de torsión, aproximando los largueros al modelo real. En esta primera línea se podría considerar la no uniformidad de la fuerza de sustentación a lo largo de la cuerda, así como mejorando la forma de introducción de las cargas al dominio computacional.

Una segunda línea de trabajo podría ser el estudio del análisis tensional del avión cuando éste se encuentra realizando otro tipo de maniobras de vuelo, por ejemplo cuando se encuentra acelerando realizando maniobras no simétricas.

Encaminado en la misma línea resulta atractivo el análisis de las tensiones que aparecen en alas de diferente geometría a la estudiada en este proyecto, como puede ser en forma trapezoidal o en flecha, las cuales son muy utilizadas en aviones de uso comercial. Este tipo de alas induciría la aparición de un momento torsor lo cual aportaría interés al estudio. En la imagen 8.1 Se muestran los tipos de configuraciones posibles de estudio.

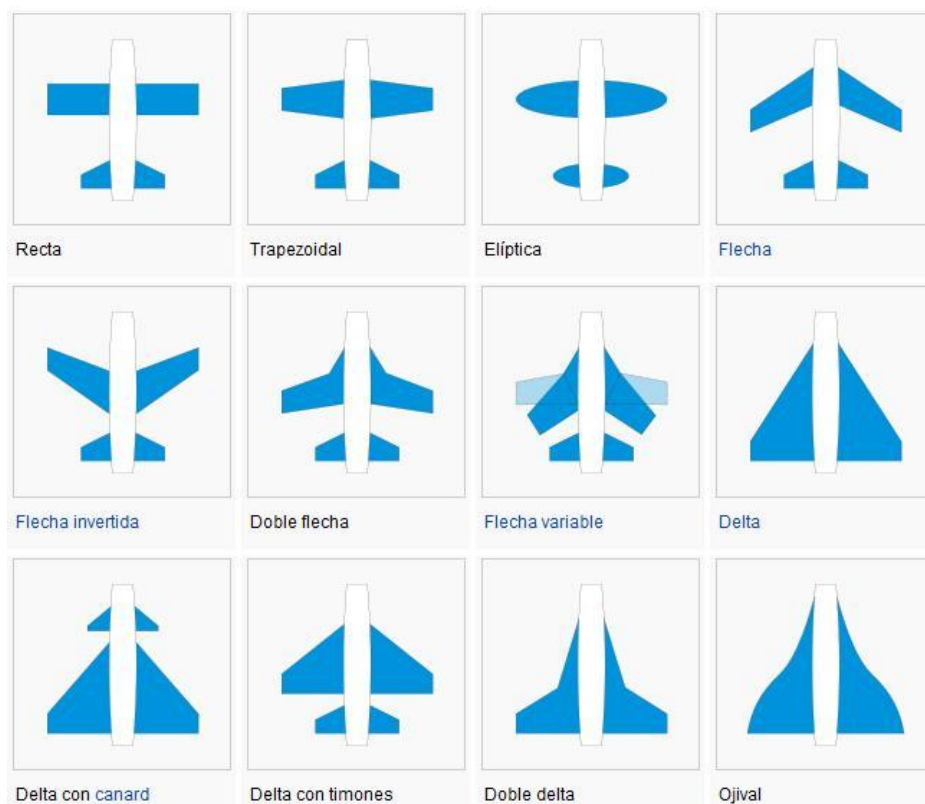


Figura 8.1: Tipos de alas de aviones.



Por último, otro camino valioso es el estudio del material utilizado y la posibilidad de sustituirlo por otro de mayores propiedades mecánicas; como pueden ser los materiales composites; entre otros la fibra de carbono, material muy ligero que posee elevada resistencia mecánica.



Bibliografía

- Jose A. Garrido y Antonio Foces, 1994, Resistencia de materiales, universidad de Valladolid
- Carlos Navarro, 2009, Elasticidad, universidad Carlos III, Madrid.
- Daniel P. Raymer, 2000, Aircraft design: a conceptual approach, AIAA Education Series.
- Jane's, 2002-2003, All the world's aircraft.
- ASM Internacional, 1996, Aluminium and Aluminium Alloys.
- Dan Doherty, 2009, Analytical modelling of aircraft wing loads using Matlab and symbolic math toolbox.
- Tutorial del programa de elementos finitos COSMOS.
- Federal Aviation Regulations, norma 25
- Russel C. Hibbeler, 1996, Mecánica vectorial para ingenieros Estática, Pearson Prentice Hall.
- Avelino Samartín Quiroga, 2004, Resistencia de materiales, Colegio de ingenieros de canales, caminos y puertos.
- Manuel Romero García y otros, 2002, Resistencia de materiales, Universitat Jaume-I.